

Diagnostische vragen over transformaties van machtsverbanden

Caspar de Bruyn

June 30, 2025

1 Introductie

Een grote uitdaging voor docenten is om het anticiperen en inspelen op misvattingen bij leerlingen. Om hierop in te kunnen spelen, is het belangrijk om een methode te hebben om deze misvattingen bloot te leggen. Een hoopvolle methode om dit te doen zijn diagnostische vragen. In het kort is een diagnostische vraag een korte vraag die ontworpen is om misvattingen van leerlingen te identificeren, en misschien nog wel belangrijker, te begrijpen (Barton, 2020).

In het vervolg van de introductie zal ik dieper in gaan op wat een diagnostische vraag is. Verder zal ik de eisen voor een goede diagnostische vraag bespreken, en het doel van diagnostische vragen. Vervolgens zal ik specifiek in gaan op diagnostische vragen binnen de wiskunde.

1.1 Wat is een diagnostische vraag

Zoals eerder genoemd is een diagnostische vraag een vraag specifiek ontworpen om misvattingen bij leerlingen bloot te leggen. Belangrijk hierin is het onderscheid te kunnen maken tussen misvattingen en fouten. Een fout is eenmalig. Wanneer een leerling gewezen wordt op het feit dat zij een fout hebben gemaakt, zal deze leerling de fout vaak kunnen vinden (Barton, 2020). Een misvatting daarentegen heeft een diepere grond. Misvattingen zijn het gevolg van foutieve overtuigingen of incomplete kennis. Een diagnostische vraag kan helpen om zowel misvattingen als fouten bij leerlingen te herkennen.

In dit onderzoek zal ik mij beperken tot diagnostische vragen die multiplechoice zijn. Multiplechoice vragen lijken op het eerste oog ongeschikt voor het vak wiskunde, aangezien de nadruk daar meer ligt op de procedure dan op het antwoord. Echter, zoals in de volgende paragraaf verder toegelicht zal worden, zullen de diagnostische vragen slechts één stap van een berekening danwel probleem testen, en dus is een berekening opschrijven niet nodig. Bovendien komt het gebruik van meerkeuze vragen met een voordeel: naast dat een leerling moet nadenken over het goede antwoord, moeten zij ook voor zichzelf redeneren waarom de andere antwoorden onjuist zijn. Zo leren zij ook direct van misconcepten (Little et al., 2012).

1.2 Voorwaarden voor een diagnostische vraag

Wat betreft de eisen voor een goede diagnostische vraag, houd ik me in dit onderzoek vast aan de voorwaarden gesteld door Barton (2020). Deze stelt de volgende eisen.

Diagnostische vragen moeten duidelijk en ondubbelzinnig zijn.

Als je de misvattingen van een leerling duidelijk wil krijgen, is het belangrijk dat fouten niet voort komen uit onduidelijkheid van de vraag. Er moet geen ruimte zijn voor onjuiste interpretatie van de vraag. Als dit wel het geval is en de leerling hierdoor een verkeerd antwoord geeft, bestaat de kans dat de docent aanneemt dat de leerling iets niet begrijpt, terwijl het probleem niet bij de kennis maar de vraag zelf lag. Het zelfde geldt voor dubbelzinnigheid, zowel in de vraag als in de antwoorden.

Diagnostische vragen moeten één enkele vaardigheid of één enkel begrip onderzoeken.

Wanneer een vraag meerdere vaardigheden of begrippen toetst, bestaat de kans dat twee leerlingen die bij een verschillende vaardigheid of begrip een misvatting hebben, toch op hetzelfde antwoord uitkomen. Dit komt vooral voor wanneer meerdere stappen nodig zijn om de vraag te beantwoorden. Denk hierbij aan het laten oplossen van een volledig stelsel. Zonder toelichting van het antwoord door de leerling, is het vrijwel onmogelijk om in een dergelijk geval de exacte fout of misvatting op te sporen. Het is daarom belangrijk om slechts één begrip of vaardigheid te toetsen, zodat het mogelijk blijft om de exacte fout aan te wijzen.

Leerlingen moeten binnen tien seconden antwoord kunnen geven.

Deze regel hangt nauw samen met de vorige. Als een leerling te lang over een vraag moet nadenken, betekent dit waarschijnlijk dat er meerdere vaardigheden of begrippen nodig zijn. Bovendien is een diagnostische vraag makkelijker in de les te verwerken wanneer deze kort is, en dus weinig leestijd in beslag neemt. Echter is dit een eis die in de praktijk kan verschillen van de theorie. De vraag moet in theorie binnen 10 seconden beantwoord kunnen worden, maar bij het toepassen in een lessituatie kan dit afwijken, en is het aan de docent om op intuïtie de juiste denktijd voor leerlingen te bepalen Barton (2020).

Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten.

Deze regel vertelt eigenlijk dat er een verschil is tussen een multiple choice vraag met instinkers, en een diagnostische vraag. Instinkers vertellen ons vaak weinig over de misvattingen van een leerling, maar een slordigheidje. Bovendien liet Marsh et al. (2007) zien dat instinkers in een multiple choice vraag er toe kan leiden dat de leerling het foute antwoord toevoegt aan hun kennis. Bovendien is het belangrijk dat de antwoordopties plausibel zijn. Het toevoegen van een antwoord mogelijkheid die hoogstwaarschijnlijk geen van de leerlingen zal kiezen, voegt weinig toe aan de toets.

Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting.

Deze regel is misschien wel de belangrijkste, maar ook de moeilijkst toetsbare eis. Uiteraard loop je altijd het risico dat een leerling de vraag goed beantwoord met behulp van gokken. Dit probleem is niet direct oplosbaar, maar wel te beperken. Het stellen van twee vragen in plaats van één, beperkt de kans op alles goed gokken al van 1 op 4 tot 1 op 16. Volgens Wylie and Wiliam (2006) kan een goed gekozen vraag die aan deze eis voldoet zelfs een rechtvaardiging zijn om met slechts één vraag het begrip van een leerling te bepalen.

Verder is het belangrijk om op te merken dat de diagnostische vragen die ik in dit onderzoek in beschouwing neem, allemaal vier antwoordmogelijkheden hebben met maar één juist antwoord. Dit omdat meer (juiste) antwoordopties er voor kan zorgen dat leerlingen verward kunnen

raken, en bovendien duurt het hierdoor automatisch langer voor een leerling om de vraag te beantwoorden.

1.3 Het doel van diagnostische vragen

Diagnostische vragen zijn een uitstekend gereedschap om in te zetten voor het formatief handelen. Met formatief handelen bedoelt men het verzamelen en interpreteren van bewijs om beslissingen te nemen over het gevolg in het leerproces (Vos & Berben, 2023). Diagnostische vragen zijn hierin een uitstekend hulpmiddel om de volgende redenen. Ten eerste krijgt de docent een beeld van heel de klas, aangezien deze allen tegelijk antwoorden op de vraag. Ten tweede, gegeven dat aan de voorwaarden van een diagnostische vraag wordt voldaan, weet de docent ook meteen welke denkfouten of misconcepties elke leerling maakt. Dit geeft de docent de mogelijkheid om een individueel gevolg te geven aan de formatieve toets. Denk hierbij aan differentiatie, maar ook aan het geven van feedforward.

Het voordeel aan diagnostische vragen is dat ze niet leunen op zelfrapportage (Barton, 2020). Wanneer leerlingen zelf moeten aangeven of ze iets begrijpen of niet, zeker als dit klassikaal moet, kan dit een barriere creëren ontstaan uit (groeps)druk (Lemov, 2015). Bovendien is het maar de vraag of leerlingen echt in staat zijn te beoordelen of ze iets begrijpen. Volgens Black and Wiliam (1998) is formatieve evaluatie de beste manier om prestaties te verhogen.

Diagnostische vragen kunnen op meerdere momenten in de les ingezet worden. Aan het begin om voorkennis te checken, tijdens of aan het einde van de uitleg als scharniervraag, of aan het einde om te achterhalen waar de volgende les moet beginnen. Het feit dat een diagnostische vraag op zoveel manieren inzetbaar is, in combinatie met de aard om weinig tijd in te nemen, maakt het een effectief formatief hulpmiddel.

1.4 Diagnostische vragen binnen de wiskunde

Diagnostische vragen hebben een bijzondere plek binnen de wiskunde. Over het algemeen geldt bij wiskunde de regel: "Geen berekening, geen punten." Echter, diagnostische vragen zijn multiple choice en vereisen dus geen berekening. Betekent dit dan dat ze ongeschikt zijn voor de wiskunde les? Allereerst zou een openvraag met berekening niet effectief zijn om snel voor de hele klas het begrip te inventariseren, en is dus ongeschikt om te gebruiken voor responsief lesgeven (Barton, 2020). Verder, zoals eerder genoemd, is één van de voorwaarden dat een diagnostische vraag maximaal één begrip, vaardigheid, of stap toetst. Dit betekent dat een berekening niet nodig is, aangezien de volgende stap in de berekening al het antwoord op de diagnostische vraag is. Dit komt met de uitdaging om vragen zo te formuleren, dat er niet meer dan één stap gemaakt hoeft te worden.

1.5 Doel van dit onderzoek

In dit onderzoek probeer ik antwoord te krijgen op de volgende vraag:

Wat zijn diagnostische vragen in de context van transformaties bij machtsverbanden inzetbaar in 3 vwo die misconcepten duidelijk maken?

Om deze vraag te beantwoorden zal eerst onderzocht worden welke bestaande misconcepten er bij leerlingen heersen over het transformeren van machtsverbanden. Deze zullen verzameld worden op basis van andere ervaringen van collega's, bestaande literatuur, en hardop denk opdrachten door leerlingen. Daarna zullen de vragen in een les getest worden, waarbij leerlingen ook toelichting op hun antwoorden geven. Dit om de vragen te valideren op de vijf eerder genoemde criteria.

In het vervolg van dit onderzoek ga ik in op de bestaande literatuur rondom misconcepten bij transformaties van machtsverbanden. Daarna beschrijf ik de methode voor data verzamelen en verwerken. Vervolgens worden de resultaten gepresenteerd, gevolgd door de conclusie en aanbevelingen.

2 Theoretisch kader

Ik beschouw drie manieren van transformeren: horizontale verschuivingen, verticale verschuivingen, en vermenigvuldiging t.o.v. de x -as. Hoewel het in de context van dit onderzoek specifiek gaat over translaties van machtsverbanden, zijn de regels voor transformatie hetzelfde voor elk type verband. De standaard regels zijn als volgt

horizontale verschuiving van $f(x)$ met a eenheden $\rightarrow$ vervang $f(x)$ met $f(x - a)$
 verticale verschuiving van $f(x)$ met b eenheden $\rightarrow$ vervang $f(x)$ met $f(x) + b$
 vermenigvuldiging van $f(x)$ met c eenheden t.o.v. de x -as $\rightarrow$ vervang $f(x)$ met $c \cdot f(x)$

Om deze regels goed te begrijpen, moet een link tussen formule en grafiek gelegd kunnen worden. Een horizontale verschuiving heeft te maken met de locatie van de grafiek t.o.v. de x -as. Hierom wordt bij een dergelijke translatie de aanpassing in functievoorschrift gekoppeld aan de onafhankelijke variabele x . Bovendien, gebeurt bij een horizontale verplaatsing van a eenheden naar rechts alles a eenheden "later", en het omgekeerde bij een translatie naar links. Hierom komt bij een translatie naar rechts een $-$ te voorschijn in de formule, waar men wellicht een $+$ zou verwachten.

Bij een verticale translatie wordt de grafiek omhoog of naar beneden geschoven. Hierdoor resulteert dezelfde waarde van x in een hoger (danwel lagere) functiewaarde. Hierom zal de de functiewaarde verhoogd (of verlaagd) moeten worden met de translatie waarde b . Deze waarde van b wordt dus bij het functie "er achter geplakt".

Bij een vermenigvuldiging t.o.v. de x -as wordt de grafiek opgerekt (of samengedrukt) in de richting van de x -as. In het geval van een negatieve c waarde wordt de grafiek ook gespiegeld in de x -as. Omdat een dergelijke transformatie alle punten op de grafiek beïnvloed, zal het gehele functievoorschrift vermenigvuldigd worden met de constante c .

Daher and Anabousi (2015) lieten leerlingen een aantal translaties uitvoeren op de functie $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$. Vervolgens werd gevraagd om deze functie 2 eenheden naar links, en 3 eenheden naar beneden te verschuiven. Zij vinden dat bij het verticaal verschuiven van 2 eenheden naar beneden, de meest voorkomende fout was om de verkeerde kant op te schuiven, dus een $+$ te schrijven waar een $-$ had moeten staan. Bij het horizontaal schuiven van 3 eenheden naar links, werd een aantal keer binnen de absoluut strepen $+3$ en -3 geschreven, maar niet direct gekoppeld aan de x .

De tweede vraag was om aan te geven welke transformaties op de functie $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ waren toegepast om uit te komen op $g(x) = |(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 4| + 2$. Hier ging het het vaakst mis bij het herkennen van de richting en grootte van de horizontale verschuiving, en een enkeling herkende de grootte van de verticale verschuiving niet.

Zazkis et al. (2003) lieten leerlingen hardop denkend de vraag beantwoorden of de grafiek van de formule $y = (x - 3)^2$ links of rechts zou liggen van de grafiek van de formule $y = x^2$. Vijf van de tien leerlingen beantwoordde deze vraag verkeerd. Een leerling licht toe dat dit komt "omdat je verwacht dat $-$ naar links is, maar dat is niet zo." Verder geeft de leerling aan dat bij verticaal verschuiven, de grafiek wel beweegt zoals je verwacht als je er een getal bij optelt of afhaalt. In dit onderzoek gaven alle respondenten aan dat de horizontale verplaatsing niet doet

wat je verwacht. Van de leerlingen die de vraag juist beantwoordden, gaven allen aan dat ze niet weten waarom het zo was, maar slechts dat het zo was. Bovendien hielden veel van hun zich vast aan heuristieken als "horizontaal is tussen de haakjes, en dan moest je het omdraaien".

In dezelfde studie kregen docenten dezelfde opdracht. Ook in deze groep gaven veel aan dat ze weten waar de grafiek heen verplaatst, omdat ze de regels weten. Er waren een aantal docenten die hun antwoord verklaarde aan de hand van een tabel, en sommigen verklaarde het doordat om op dezelfde y uit te komen, de x drie hoger moet zijn bij $y = (x-3)^2$ dan bij $y = x^2$. Daarom moest het om een verschuiving naar rechts gaan. Een enkeling zag de term $x-3$ als een verschuiving van de assen, en zo zou de grafiek verder naar rechts komen te liggen.

Het verwarren van de $+$ en $-$ bij horizontale verschuivingen wordt ook benoemd in Ninness et al. (2006), Smith (2009), en Baker et al. (2001). Verder wordt in Baker et al. (2001) benoemd dat leerlingen horizontale verschuivingen lastiger vinden dan verticale verschuivingen, aangezien horizontale verschuivingen direct op de variabele x toegepast moeten worden, waar verticale verschuivingen over het hele functievoorschrift worden toegepast.

Verder benoemd Smith (2009) dat leerlingen geregeld vergeten dat de volgorde waarin transformaties worden toegepast van belang is.

Aanvullend heb ik bij ervaren vakcollega's geraadpleegd welke misconcepten zij het meest tegenkomen. Zij bevestigde de misconcepten gevonden in de literatuur, en hadden nog drie aanvullende misconcepten die zij regelmatig terug zien. De misconcepten vanuit de literatuur en volgens collega's kunnen als volgt gecategoriseerd worden. Alle fouten worden gedemonstreerd aan de hand van een transformatie van de functie $f(x) = x^2$.

1. Bij een horizontale verschuiving associeren leerlingen een verschuiving naar rechts met $+$, en naar links met $-$, waardoor bijvoorbeeld een verschuiving van 3 naar links geassocieerd wordt met het functievoorschrift $f(x) = (x-3)^2$.
2. Bij horizontale verschuiving wordt de aanpassing van de functie niet bij de x gedaan. Zo wordt een verschuiving van 3 naar links geassocieerd met de functie $f(x) = x^2 - 3$.
3. De leerling weet dat de $+$ en $-$ bij horizontale verschuiving in hun opzicht andersom gebruikt worden, maar wisselen deze vervolgens ook om bij een verticale verschuiving. Zo wordt een verschuiving van 3 omhoog geassocieerd met het functievoorschrift $f(x) = x^2 - 3$.
4. Bij een vermenigvuldiging t.o.v. x -as wordt de transformatie van het functievoorschrift alleen aan de x gekoppeld. Zo wordt een vermenigvuldiging van 2 t.o.v. de x -as bij $y = x^2 + 3$ geassocieerd met $f(x) = 2x^2 + 3$, of $f(x) = (x+3)^2$ wordt na de transformatie geassocieerd met $f(x) = (2x+3)^2$.
5. Bij een vermenigvuldiging t.o.v. x -as wordt ook binnen de haakjes vermenigvuldigd. Zo wordt $f(x) = (x+3)^2$ na een vermenigvuldiging t.o.v. de x -as geassocieerd met het functievoorschrift $f(x) = (2x+6)^2$.
6. Leerlingen weten niet dat de volgorde van transformaties van belang is, in het bijzonder bij vermenigvuldiging t.o.v. de x -as.

3 Methodologie

Het doel is om twee diagnostische vragen te ontwikkelen in het kader van transformaties van machtsverbanden, geschikt voor gebruik in 3 vwo. Het ontwikkelen van deze vragen zal plaats vinden in drie stappen. Deze stappen zijn

1. Eerste ontwerp
2. Pilot
3. Externe validatie

Deze drie stappen zal ik nu wat uitgebreider toelichten.

3.1 Eerste ontwerp

In deze eerste stap inventariseer ik in de literatuur en bij vakcollega's welke misconcepten veelvoorkomend zijn in de context van transformaties van machtsverbanden. Op basis hiervan heb ik een eerste ontwerp gemaakt.

Ik heb besloten één vraag te maken over horizontale verschuivingen, en één vraag waar de volgorde van transformaties van belang is. Dit zijn de opgestelde vragen:

De grafiek van $f(x) = 2x^2$ wordt 3 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van functie g . Geef het functie voorschrift van g .

A. $g(x) = 2(x - 3)^2$

B. $g(x) = 2(x + 3)^2$

C. $g(x) = 2x^2 + 3$

D. $g(x) = 2x^2 - 3$

FIGURE I. Diagnostische vraag 1: horizontale verschuiving

De grafiek van $g(x) = 2x^3 - 3$ ontstaat na twee transformaties uit $f(x) = x^3$. Geef aan welke twee transformaties dit zijn.

- A. Een verticale verschuiving van 3 omhoog, gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2.
- B. Een verticale verschuiving van 3 omlaag, gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2.
- C. Een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2, gevolgd door een verticale verschuiving van 3 omlaag.
- D. Een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2, gevolgd door een verticale verschuiving van 3 omhoog.

FIGURE II. Diagnostische vraag 2: volgorde van transformaties

Voor het gemak en de leesbaarheid, zal ik vanaf nu naar de eerste diagnostische vraag refereren als DV1, en naar de tweede vraag als DV2.

In DV1 is antwoord **B** correct. Antwoord **A** komt overeen met het misconception van verwisseling van + en - bij horizontale verschuiving. Bij antwoord **C** heeft de leerling door dat bij een verschuiving naar links een + in het functievoorschrift komt, maar koppelt de verandering van het voorschrift niet aan de variabele x . Antwoord **D** is een combinatie van de misconcepten bij **A** en **C**.

In DV2 is antwoord **C** correct. Bij antwoord **A** en **B** is de leerling niet in staat te herkennen dat een vermenigvuldiging ná een verschuiving ook de -3 zou beïnvloeden. Bijkomend verwacht de leerling bij antwoord **A** ook een verschuiving omlaag met een verschuiving omhoog. Bij antwoord **D** is de leerling in staat te herkennen dat de volgorde van transformaties van belang is, maar verwacht een verschuiving omlaag met een verschuiving omhoog.

Het toetsen van de diagnostische vragen aan de eisen zoals benoemd in Sectie 1.2 zal ik deels hier doen, maar vooral na de pilot en externe validatie, omdat daar pas duidelijker wordt of een vraag bijvoorbeeld duidelijk is. We kunnen hier wel al toetsen of een vraag slechts één vaardigheid test. DV1 toetst duidelijk maar één vaardigheid, namelijk het horizontaal verschuiven van een grafiek. DV2 test in principe meerdere vaardigheden, namelijk de volgorde van translaties en het verticaal verschuiven van een grafiek. Echter, de antwoord opties zijn zo geformuleerd, dat alsnog alle misconcepten die een leerling heeft los herkend kunnen worden. Hiermee is ook aan de eis dat elk antwoord informatie moet geven zonder toelichting voldaan. Hetzelfde geldt voor DV1. De andere eisen zullen nader getoetst worden na de pilot en externe validatie stap.

3.2 Pilot

Wanneer ik het eerste ontwerp van de vragen klaar heb, zal ik deze voorleggen bij een aantal leerlingen die de stof al eerder hebben gehad. Hiervoor vraag ik minimaal één leerling die

wiskunde A volgt, en één leerling die wiskunde B volgt. Dit omdat deze leerlingen vaak een andere strategie hebben om vragen aan te pakken, en in 3 vwo zijn deze leerlingen nog niet van elkaar gescheiden. Een omschrijving van de ondervraagde leerlingen is te vinden in de resultaten. Ik laat de leerlingen hardop denken tijdens het beantwoorden van de vragen, zodat ik verhelderende vragen kan stellen wanneer nodig. In deze fase is het belangrijk om te monitoren of de leerlingen niet op het goede antwoord komen met een verkeerde redenering, en of de leerlingen niet een ander misconception bij een antwoord optie hebben dan initieel gedacht. Ook noteer ik of de misconcepten die leerlingen al dan niet hebben overeenkomen met de misconcepten die ik in het theoretisch kader heb genoemd. Als dit het geval is zal ik de antwoordmogelijkheden, en wellicht de vragen, moeten aanpassen.

3.3 Externe validatie

De laatste stap is om de vragen uit te testen in een klassen setting. Hierbij zal ik de leerlingen het antwoord op de vraag op laten schrijven, **inclusief** een toelichting. Dit in tegenstelling tot de standaard situatie waarin een diagnostische vraag toegepast wordt. Deze toelichting is belangrijk, om op grote schaal te controleren of de vragen inderdaad voldoen aan de vijf voorwaarden zoals gesteld in Sectie 1. In deze toelichting zal ik leerlingen niet alleen vragen waarom ze voor hun antwoord hebben gekozen, maar ook waarom niet voor de andere antwoordopties. Deze resultaten zullen gebruikt worden voor een laatste validatie van de vraag en antwoorden. Ik codeer de gegeven antwoorden in drie categorieën: (mis)concept zoals verwacht, ander (mis)concept dan verwacht, vraag verkeerd begrepen, of geen toelichting. Indien nodig kan de vraag na deze stap wederom aangepast worden, en zal er een nieuwe ronde van externe validatie moeten plaats vinden.

4 Resultaten

In dit onderdeel zal ik de resultaten bespreken volgens stap 2 en 3 zoals benoemd in Sectie 3.

4.1 Pilot

Als vervolgstap heb ik de diagnostische vragen voorgelegd aan drie leerlingen, en heb deze hardop denkend de vragen laten beantwoorden.

Leerling 1

De eerste ondervraagde leerling zit in 5 vwo, en volgt wiskunde B. De leerling presteert gemiddeld beter dan de andere leerlingen uit hun klas. Hieronder staat een (samengevatte) transcriptie van de hardop denk opdracht.

DV1:

1. Oh translaties daar was iets mee. Links was negatief, maar met translaties ging het precies andersom dus het wordt $+3$
2. Horizontaal is met de x , dus het is $x+3$, dus het moet antwoord **B** zijn.

We zien dat de leerling bij DV1 correct herinnert dat bij een horizontale verschuiving het resulterende functievoorschrift onintuïtief was, en dat bij een verschuiving naar links een $+$ kwam. Verder herkent de leerling juist dat een horizontale verschuiving direct gelinkt is aan de onafhankelijke variabele x . De leerling kiest hierdoor het juiste antwoord **B**.

DV2:

1. Vermenigvuldigen is je c keer de hele formule, dus die moet eerst, anders kreeg je haakjes rond de 3. A en B vallen dus af
2. Het is -3 , en bij translaties waren plus en min omgedraaid dus hij gaat omhoog, dus het is **D**.

De leerling ziet correct in dat de vermenigvuldiging eerst moet, omdat anders de -3 op het einde niet kan volgen uit een verschuiving van 3. Echter, de leerling past de heuristiek “bij translatie zijn de $-$ en $+$ andersom” ook toe op een verticale verschuiving, waar dit niet moet. Hierdoor kiest de leerling incorrect het antwoord **D**

Leerling 2

Leerling twee zit in 4 havo, en volgt wiskunde A. De leerling presteert vergeleken met hun klasgenoten gelijk aan het klassen gemiddelde. Hieronder staat een (samengevatte) transcriptie van de hardop denk opdracht.

DV1:

1. Oke een functie dus dat is wat je er uit krijgt. De translatie is $(-3, 0)$.

2. Naar links hoort bij x , dus binnen de haakjes.
3. Binnen haakjes waren $+$ en $-$ omgedraaid want de $-$ stond er al, dus het wordt $+$
4. Dus het is **B**.

Opvallend is dat de leerling de gegeven transformatie direct linkt aan een translatie met coördinaten, en op deze manier los lijkt te koppelen van een grafiek en direct op geleerde regels afgaat. Echter, in de tweede stap benoemt de leerling nog wel dat naar links schuiven gerelateerd is aan de onafhankelijke variabele x . De leerling grijpt daarna ook naar de heuristiek van $+$ en $-$ omdraaien, maar benoemt expliciet dat deze alleen geldt voor een aanpassing tussen de haakjes. Hierdoor komt de leerling correct op het antwoord **B**.

DV2:

1. A en B sowieso niet, want je moet eerst vermenigvuldigen t.o.v. de x -as, anders gaat de 3 ook keer 2.
2. Verticaal is de y , en daar waren $+$ en $-$ niet omgedraaid, en het blijft dus $-$ voor omlaag.
3. Dus het moet **C** zijn.

Ook deze leerling merkt correct op dat de vermenigvuldiging moet gebeuren voor de verticale verschuiving. Vervolgens benoemt de leerling wederom expliciet dat bij een verticale verschuiving de $+$ en $-$ niet andersom waren. Zo komt de leerling correct op antwoord **C**.

Leerling 3

Leerling drie zit in 4 vwo, en volgt wiskunde A. Deze leerling presteert over het algemeen onder het gemiddelde, maar staat wel een voldoende. Hieronder staat een (samengevatte) transcriptie van de hardop denk opdracht.

DV1:

1. $f(x) = 2x^3$ gaat 3 naar links, dus dat is negatiever.
2. De f is gewoon hetzelfde alleen wordt het een g .
3. Dus als het met 3 naar links gaat, wordt het $2x^3 - 3$, dus het antwoord is **D**

We zien dat de leerling een veel voorkomende argumentatie gebruikt, dat links negatiever is. De leerling is vervolgens niet in staat om te herkennen dat een horizontale verschuiving gelinkt is aan de onafhankelijke variabele x , en komt zo op het incorrecte antwoord **D**.

DV2:

1. $g(x) = 2x^2 - 3$ komt uit $f(x) = x^2$, dus de x^2 is verdubbelt want er staat een 2 voor.
2. En hij is 3 naar links verschoven want er is -3 , maar naar links is geen optie dus dan zal het 3 omlaag zijn.
3. Dan is het dus **B**.

Opvallend in het antwoord van de leerling is dat deze ook hier een verschuiving naar links associeert met een aanpassing van het functievoorschrift op de verkeerde plek, maar passen hun antwoord aan omdat links geen optie is. Dit zou een reden kunnen zijn om de vraag aan te passen, omdat de leerling dus op een antwoordoptie is gekomen met een ander misconception dan verwacht. Echter, is dit niet het misconception dat we bij deze vraag willen toetsen. Dit misconception wordt al getoets bij DV1. Dit benadrukt vooral het belang om diagnostische vragen niet in isolatie te gebruiken, maar verschillende diagnostische vragen te gebruiken om alle misconcepten bij leerlingen te kunnen identificeren. Verder blijkt uit de gedachtegang van de leerling niet dat er een besef is van het belang van volgorde. Hierdoor kiest de leerling incorrect voor antwoord **B**.

We zien dat geen van de leerlingen een vraag niet heeft begrepen, en geen van de leerlingen geeft aan dat meerdere antwoorden hetzelfde voorstellen. Dit betekent dat beide vragen zouden voldoen aan de eis van duidelijkheid en ondubbelzinnigheid. Verder konden de leerlingen vrijwel altijd de vraag binnen 10 seconden beantwoorden, en allen waren in staat de vragen binnen 20 seconden te beantwoorden. Hieruit trek ik de conclusie dat ook aan de eis van snel antwoord kunnen geven voldaan is, in ieder geval bij deze leerlingen. We zien ook dat geen van de leerlingen met een onjuiste verklaring op het juiste antwoord is gekomen. Het lijkt er dus op dat tot dit punt de vragen voldoen aan de eisen, en niet aangepast hoeven worden.

4.2 Externe validatie

Voor de externe validatie heb ik VD1 en VD2 afgenomen in een 3 vwo klas met 26 leerlingen. De leerlingen werd gevraagd om hun antwoord te geven, en schriftelijk toe te lichten waarom zij dachten dat dat antwoord goed was, en ook vooral waarom de andere antwoorden fout waren. Hieronder zien we voor VD1 hoe vaak elk antwoord is gegeven, en met welke toelichting.

Antwoord optie	(mis)concept als verwacht	ander (mis)concept dan verwacht	Vraag verkeerd begrepen	Geen toelichting
A	6	0	0	0
B	18	0	0	0
C	0	0	0	1
D	1	0	0	0

Zoals we kunnen zien is het juiste antwoord, antwoord **B**, het meest gegeven antwoord. De meest voorkomende toelichting voor dit antwoord was een zin in de richting van "Naar links was plus en rechts was min". Deze verklaring werd bij negen antwoorden gegeven. Verder verwezen zeven leerlingen naar de standaardformule $f(x) = a(x - p)^n + q$, en dat een verschuiving naar links zorgde voor een negatieve p , maar dat de $-$ in de standaard formule er voor zorgde dat we eindigde met $x + 3$ tussen de haakjes. Daarnaast benoemde tien van hun dat een horizontale verschuiving met de x te maken had, en daarom moest er binnen de haakjes iets veranderen. Hierom sloten zij **C** en **D** uit.

Van de leerlingen die kozen voor antwoord optie **A** gaven alle zes aan dat een verschuiving naar links "negatief" was, en dus dat **A** het juiste antwoord was. Twee van hun gaven aan dat de horizontale verschuiving gelinkt was aan de x , en dus binnen de haakjes moest.

De leerling die antwoord **C** heeft gekozen, heeft geen toelichting gegeven. Verder gaf de leerling die koos voor **D** aan dat een translatie naar links een $+$ in de formule had, maar koppelde dit schijnbaar niet aan de variabele x . Deze leerling had wel een tekening gemaakt van de grafiek, maar enkel met de volgens hun nieuwe grafiek, die niet overeen kwam met het nieuwe functie voorschrift waar zij voor kozen.

We zien dat geen van de leerlingen met het juiste antwoord hierop is gekomen met een onjuiste redenatie, of aan de hand van een misconception. Verder lijkt het er op dat geen van de leerlingen de vraag verkeerd heeft begrepen, of dat antwoorden meerduidelijk waren. Leerlingen hadden langer dan 10 seconden nodig, maar dit is te verwachten aangezien verwacht werd dat zij hun volledige redenatie opschreven.

Nu zal ik de resultaten van VD2 presenteren.

Antwoord optie	(mis)concept als verwacht	ander (mis)concept dan verwacht	Vraag verkeerd begrepen	Geen toelichting
A	1	0	3	1
B	4	0	0	0
C	13	0	0	3
D	1	0	0	0

We zien dat ook bij deze vraag, het goede antwoord het meest is gekozen. Van de leerlingen die antwoord **C** hebben gekozen, gaven 13 van hun een toelichting in de vorm van stapsgewijze translaties bij alle mogelijke antwoord opties, om zo aan te tonen dat ze bij **C** op het gevraagde voorschrift kwamen. Meeste van benoemde expliciet dat bij antwoord **A** en **B** de 3 ook vermenigvuldigd met 2 zou moeten worden. De overige 3 leerlingen hebben geen toelichting opgeschreven.

Vijf van de leerlingen hebben antwoord **A** gegeven. Opvallend is dat drie van hun de vraag verkeerd begrepen lijken te hebben. Zij hebben de translaties die in de antwoord opties gegeven zijn toegepast op het nieuwe voorschrift van $g(x)$, in plaats van op $f(x)$. Met hun redenatie kwamen zij na een translatie van 3 omhoog van $2x^3 - 3$ naar $2x^3$. Hierna gaven zij aan dat een vermenigvuldiging met 2 resulteerde in x^3 . Uiteraard is deze laatste stap incorrect, maar gegeven dat zij de vraag verkeerd begrepen, is dit de enige optie voor hun die over blijft. Hieruit maak ik op dat de vraag niet duidelijk genoeg geschreven is, en dus zal ik de vraagstelling moeten aanpassen.

Van de overige leerlingen die **A** hebben gekozen, was er één leerling die de fout maakte dat bij een verticale translatie de $+$ en $-$ ook “omgedraaid” waren, net als bij een horizontale translatie. De andere leerling heeft geen toelichting gegeven.

Van de vier leerlingen die antwoord **B** gaven, was bij allen duidelijk dat zij volgorde niet in acht namen. Zij benoemde de juiste redenatie, alleen kwam de volgorde waarin zij dit noemde niet overeen met de volgorde die in antwoord **B** genoemd wordt.

Bij de ene leerling die antwoord **D** gaf, was duidelijk dat zij dachten dat ook bij een verticale translatie, de $+$ en $-$ tegenovergesteld aan de intuïtie gebruikt werden.

Interessant om te benoemen is dat bij deze vraag, een aantal leerlingen hardop benoemden dat antwoord **A** en **B** het zelfde waren als antwoord **D** en **C**, respectievelijk. Echter komt dit

naar mijn idee niet voort uit onduidelijkheid van de vraag, maar uit de onwetendheid over het belang van de volgorde van translaties.

Verder zien we dat geen van de leerlingen op het juiste antwoord is gekomen met een onjuiste redenering. Feit is wel dat de vraag schijbaar onduidelijk was voor sommige leerlingen, en dus moet deze worden aangepast.

5 Conclusie en Discussie

In dit onderzoek was het doel om de meest voorkomende misconcepten die leerlingen hebben bij het transformeren van machtsverbanden te vinden, en hierbij diagnostische vragen op te stellen om deze misconcepten bloot te leggen. Uit de literatuur en ervaring van docenten kwamen zes veelvoorkomende misconcepten naar voren, waarvan de meest genoemde het verwarren van het - en + teken bij een horizontale verschuiving, en het niet in acht nemen van de volgorde van transformaties.

Op basis van deze misconcepten zijn twee diagnostische vragen opgesteld, zie Figuur I en II. Na een pilot van deze vragen bij drie leerlingen die de stof al eerder eigen hebben gemaakt, leken deze vragen geschikt. De vragen zijn getest in een 3 VWO klas, waarbij leerlingen hun antwoord moesten toelichten. Hieruit bleek dat bij onjuiste antwoorden deze volgden uit de misconcepten zoals verwacht. Echter, bij de tweede vraag bleek dat drie leerlingen de vraag niet goed begrepen hadden. Dit is reden om de vraag aan te passen. Na aanpassing luidt DV2 als volgt.

Op de grafiek van $f(x) = x^3$ worden twee translaties toegepast. Zo ontstaat de grafiek van $g(x)$ met functievoorschrift $g(x) = 2x^3 - 3$. Welke twee translaties waren dit?

- A. Een verticale verschuiving van 3 omhoog, gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2.
- B. Een verticale verschuiving van 3 omlaag, gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2.
- C. Een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2, gevolgd door een verticale verschuiving van 3 omlaag.
- D. Een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as van 2, gevolgd door een verticale verschuiving van 3 omhoog.

FIGURE III. Aangepaste diagnostische vraag 2: volgorde van transformaties

Deze vraag heb ik later aan de klas voorgelegd, en hierbij gaf iedereen aan deze vraag duidelijker te vinden dan de eerder gestelde vraag.

Na deze aanpassing, voldoen beide diagnostische vragen aan de eisen van een diagnostische vraag zoals benoemd in Sectie 1.2, behalve dat de vraag wellicht niet binnen 10 seconden beantwoord kan worden. Maar zoals eerder genoemd, is deze voorwaarde niet zo strict. Het belangrijkste is dat de vragen binnen redelijk korte tijd beantwoord kunnen worden, zodat deze ingezet kunnen worden als snelle inventarisatie.

Met deze twee diagnostische vragen zijn nog niet alle veelvoorkomende misconcepten die uit de literatuur en ervaring naar voren kwamen getoetst. In het bijzonder is voor een vermenigvuldiging t.o.v. de x -as alleen het begrip van volgorde getoetst, maar niet de plaatsing van de vermenigvuldigingsconstante. Hiervoor zou het ook nuttig zijn om een diagnostische

vraag te ontwikkelen.

References

- Baker, B., Hemenway, C., & Trigueros, M. (2001). On transformations of functions. *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for PME*, 1, 91–98.
- Barton, G. (2020). *Volgens barton* (R. Kneyber, Trans.). Phronese.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. Granada Learning.
- Daher, W., & Anabousi, A. (2015). Students' recognition of function transformations' themes associated with the algebraic representation. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*.
- Lemov, D. (2015). *Teach like a champion 2.0: 62 techniques that put students on the path to college*. Wiley.
- Little, J. L., Bjork, E. L., Bjork, R. A., & Angello, G. (2012). Multiple-choice tests exonerated, at least of some charges: Fostering test-induced learning and avoiding test-induced forgetting. *Psychological science*, 23(11), 1337–1344.
- Marsh, E. J., Roediger, H. L., Bjork, R. A., & Bjork, E. L. (2007). The memorial consequences of multiple-choice testing. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14, 194–199.
- Ninness, C., Barnes-Holmes, D., Rumph, R., McCuller, G., Ford, A. M., Payne, R., Ninness, S. K., Smith, R. J., Ward, T. A., & Elliott, M. P. (2006). Transformations of mathematical and stimulus functions. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 39(3), 299–321. <https://doi.org/10.1901/jaba.2006.139-05>
- Smith, H. (2009). Teaching and learning function transformations. *Unpublished Master's Thesis*. Arizona State University.
- Vos, R., & Berben, M. (2023). *Formatief handelen in de les*. CPS.
- Wylie, E., & Wiliam, D. (2006). Diagnostic questions: Is there value in just one. *Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education*. San Francisco, CA.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 435–448.