

Effectieve diagnostische vragen voor algebraïsche transformaties in het voortgezet onderwijs

Joris Perrenet

August 12, 2025

Abstract

Elke docent heeft leerlingen die wel eens een fout maken. Zeker bij een vak als wiskunde heeft iedereen wel eens een rekenfout gemaakt. Terwijl fouten eenmalig kunnen zijn, zijn misconcepten veel gevaarlijker. Vaak zijn ze diep verankerd in de cognitieve structuur van leerlingen, waardoor ze zich niet bewust zijn van de fouten die ze maken (M. Dam, 2025, p.5). Barton, 2018, p.36 zegt dat misconcepten het resultaat zijn van verkeerde overtuigingen of incomplete kennis van leerlingen. Diagnostische vragen vormen een waardevol instrument voor het identificeren van deze misconcepten (Barton, 2020a). Hierdoor kunnen diagnostische vragen fungeren als middel om formatief te handelen (Faes, 2021).

Bestaande collecties van diagnostische vragen (te vinden op <https://jorisperrenet.github.io/diagnostische-vragen>) hadden vragen over algebraïsche transformaties van functies nog niet in hun database opgenomen. Daarom richt dit onderzoek zich op het ontwikkelen van diagnostische vragen voor algebraïsche transformaties van functies in 4 gymnasium, die zo goed mogelijk voldoen aan Barton's vijf kenmerken van goede diagnostische vragen: duidelijkheid, focus op één concept, korte beantwoordingstijd, interpreteerbare antwoordopties en onmogelijk een correct antwoord krijgen bij leerlingen met een misconception.

De methodologie bestond uit een iteratief ontwikkelingsproces met meerdere feedbacklussen, waarbij zes diagnostische vragen werden ontworpen en verfijnd door feedback van een vakcoach, input van leerlingen tijdens hardopdenksessies, feedback van een vakdidacticus en uiteindelijk een praktijktest bij 14 leerlingen via een vragenlijst. De resultaten toonden significante verschillen in prestaties: terwijl vraag 1 door 13 van de 14 leerlingen correct werd beantwoord, hadden vragen 3, 4 en 5 hoge foutpercentages met respectievelijk 2, 0 en 1 leerling(en) die het correcte antwoord gaven.

Het onderzoek identificeerde specifieke misconcepten rond het gebruik van haakjes bij transformaties, verwarring over de soort transformatie, de onderliggende basisfunctie, en problemen met de volgorde van gecombineerde transformaties. Voor toekomstig onderzoek wordt aanbevolen om hardopdenksessies op te nemen en antwoordopties niet vooraf te geven. Bij de uiteindelijke vragenlijst voor het uittesten van de diagnostische vragen is het verstandig om een "anders, namelijk" optie toe te voegen.

De impact van dit onderzoek werd gerealiseerd door het creëren van een webpagina over diagnostische vragen, die beschikbaar werd gesteld voor alle docenten van mijn stageschool (te vinden op <https://jorisperrenet.github.io/diagnostische-vragen>), zie hoofdstuk 6.

Contents

1	Inleiding	2
2	Theoretisch Kader	4
2.1	Literatuur over diagnostische vragen	4
2.2	Transformaties	5
2.3	Literatuur over transformaties	5
2.4	Goede diagnostische vragen	6
2.5	Onderzoeksvraag	6
3	Methode	8
3.1	Uitgangspositie	8
3.2	Iteraties	10
3.2.1	Hardopdenksessie	10
3.2.2	Vragenlijst	10
3.3	Overzicht	10
4	Resultaten	12
4.1	Herformulering van vragen	12
4.1.1	Vakcoach	12
4.1.2	Leerlingen	13
4.1.3	Vakdidacticus	13
4.2	Resultaten van de vragenlijst	14
4.2.1	De laatste aanpassingen	15
4.2.2	De definitieve vragen	16
5	Conclusie	18
5.1	Discussie	18
6	Impact	20
6.1	Wat zijn de doelen?	20
6.2	Wat was mijn impactactiviteit?	20
6.3	Heb ik impact kunnen maken?	20
6.4	Alternatieve impactactiviteiten	21
6.4.1	Keuzemotivatie	21
6.5	Wat heb ik geleerd over het bereiken van impact?	21
A	Werkblad	22
B	Analyse van Kenmerken	25
C	Resultaten Vragenlijst	28
C.1	Vraag 1	28
C.2	Vraag 2	29
C.3	Vraag 3	31
C.4	Vraag 4	32
C.5	Vraag 5	34

Chapter 1

Inleiding

Iedereen maakt wel eens fouten. Zeker bij schoolvakken als wiskunde heeft iedereen wel eens een rekenfout gemaakt. Terwijl fouten eenmalig kunnen zijn, zijn misconcepten veel gevaarlijker. Vaak zijn ze diep verankerd in de cognitieve structuur van leerlingen, waardoor ze zich niet bewust zijn van de fouten die ze maken (M. Dam, 2025, p.5). Barton, 2018, p.36 zegt dat misconcepten het resultaat zijn van verkeerde overtuigingen of incomplete kennis van leerlingen. Diagnostische vragen vormen een waardevol instrument voor het identificeren van deze misconcepten (Barton, 2020a). Hierdoor kunnen diagnostische vragen fungeren als middel om formatief te handelen (Faes, 2021).

Het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs staat voor de continue uitdaging om complexe concepten op een begrijpelijke en effectieve manier over te brengen aan leerlingen. Een van de fundamentele vaardigheden binnen de wiskunde betreft het begrip van functies en hun transformaties, waarbij leerlingen moeten leren hoe functies algebraïsch aanpassen door translaties en vermenigvuldigingen met assen. Onderzoek (zie sectie 2.3) toont aan dat leerlingen aanzienlijke moeilijkheden ondervinden bij het toepassen van transformaties op functies, met name bij horizontale translaties en gecombineerde transformaties. Om deze problemen aan te pakken, wil je als docent beschikken over instrumenten waarmee je specifieke misconcepten van hun leerlingen kan identificeren, voordat je ze gaat verhelpen. Diagnostische vragen vormen hierbij een waardevol hulpmiddel (zie sectie 2.1). Aangezien bestaande collecties van diagnostische vragen incompleet waren met betrekking tot dit onderwerp richt dit onderzoek zich specifiek op het ontwikkelen van diagnostische vragen voor algebraïsche transformaties van functies in 4 gymnasium, met als doel docenten te voorzien van effectieve instrumenten voor formatieve handelen.

De relevantie van dit onderzoek wordt onderstreept door uitgebreid literatuuronderzoek dat de complexiteit van transformaties bij functies benadrukt. Onderzoek laat zien dat leerlingen aanzienlijke uitdagingen ondervinden bij het toepassen van transformaties op functies, waarbij horizontale translaties vaak lastiger worden ondervonden dan verticale translaties (Ana Elisa Lage, 2006, Vol.2-26). Dit wordt bevestigd door Eisenberg and Dreifus, 1994, p.58, die aangeven dat “transformations which represent translation or stretching of a graph in the vertical direction seem to be more easily understood than similar transformations in a horizontal direction”. Wanneer meerdere transformaties gecombineerd worden, nemen de moeilijkheden voor leerlingen nog meer toe (Sasman, 2011, p.10) (Anabousy et al., 2014, table 2).

De methodologie van dit onderzoek bestond uit een iteratief ontwikkelingsproces waarbij zes diagnostische vragen werden ontworpen gebaseerd op Barton’s vijf kenmerken van effectieve diagnostische vragen (Barton, 2020a): duidelijkheid en ondubbelzinnigheid, focus op een enkele vaardigheid of concept, beantwoordbaar binnen tien seconden, interpreteerbare verkeerde antwoorden zonder verdere uitleg, en het onmogelijk zijn om de vraag correct te beantwoorden met een misconception. Het ontwikkelingsproces doorliep meerdere feedbacklussen, beginnend met feedback van een vakcoach, gevolgd door input van leerlingen tijdens hardopdenksessies met vier leerlingen, feedback van een vakdidacticus, en uiteindelijk een praktijktest bij 14 leerlingen van een 4 gymnasium klas via een vragenlijst waarbij na elke diagnostische vraag de vraag werd gesteld waarom de niet gekozen antwoordmogelijkheden fout waren.

De onderzoeksvraag betrof de *effectiviteit* van de diagnostische vragen. De vragen moesten zo goed mogelijk voldoen aan de 5 kenmerken van Barton (zie sectie 2.4). De ontwikkelde vragen rondom algebraïsche transformaties staan in hoofdstuk 4. Voor toekomstig onderzoek naar de effectiviteit van andere diagnostische vragen wordt aanbevolen dat antwoordopties bij hardopdenksessies niet vooraf gegeven worden en dat er een “anders, namelijk” optie bij het uittesten van vragen toegevoegd wordt. Daarnaast is het handig om de

gesprekken bij de hardopdenksessies op te nemen. Vervolgonderzoek kan zich richten op het uitbreiden van de vragenbank naar andere wiskundige domeinen en het onderzoeken van de lange-termijn effecten van het gebruik van diagnostische vragen op leerlingprestaties.

Chapter 2

Theoretisch Kader

Dit hoofdstuk bestaat uit 4 delen. Het eerste deel gaat in op de literatuur omtrent de noodzaak van diagnostische vragen in het Nederlandse onderwijs. Het tweede deel geeft achtergrondinformatie over het soort transformaties die later zijn verwerkt in de diagnostische vragen. Het derde deel gaat in op literatuur omtrent misconcepten bij het toepassen van transformaties. Het laatste deel gaat over wat een goede diagnostische vraag maakt. Tot slot presenteren wij onze onderzoeksvraag.

2.1 Literatuur over diagnostische vragen

Diagnostische vragen blijken een cruciaal instrument te zijn voor het identificeren van misconcepten bij leerlingen en het ondersteunen van formatief handelen, waarbij onderzoek consistent aantoont dat deze specifiek ontworpen meerkeuzevragen docenten helpen om snel geïnformeerde beslissingen te nemen over vervolgstappen in het onderwijs.

Diagnostische vragen onderscheiden zich van reguliere toetsvragen doordat zij specifiek ontworpen zijn om inzicht te geven in de denkprocessen van leerlingen. Volgens (Barton, 2018, p.36) is “een diagnostische vraag ontworpen om te helpen identificeren en *begrijpen* van fouten en misconcepten van leerlingen op een efficiënte en accurate manier”. Een goede diagnostische vraag moet voldoen aan vijf cruciale criteria: zij moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn, één enkele vaardigheid of concept onderzoeken, binnen 10 seconden beantwoordbaar zijn, van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder verdere toelichting, en het moet niet mogelijk zijn om het juiste antwoord te bereiken terwijl je nog steeds een belangrijke misconceptie houdt (M. Dam, 2025, p.8-9).

Het gebruik van diagnostische vragen faciliteert formatief handelen doordat ze stappen (M. Dam, 2025, p.5) van de formatieve cyclus (verwachtingen verhelderen, studentreacties ontlokken en verzamelen, reacties analyseren en interpreteren, communicatie met studenten over reacties, vervolgactie ondernemen) kunnen ondersteunen (Faes, 2021). STEM Learning, n.d., p.2 stelt dat “diagnostische vragen kunnen worden gebruikt op formatieve wijze, en het meest effectief, in lessen wanneer de vragen kort en gefocust zijn op een enkel idee”. Deze vragen zijn eenvoudig af te nemen in de klas (activiteit), ter plaatse snel te scoren op misconceptie (informatie), om direct als feedback te gebruiken in het vervolg van de les (aanpassen) (M. Dam, 2025, p.4). De implementatie blijkt echter uitdagend: uit Nederlands onderzoek blijkt dat docenten vooral stap 2 vormgeven (ontlokken van studentreacties), maar het minst handelingsbekwaam zijn voor stap 5 (het ondernemen van vervolgstappen) (Gulikers, 2017).

Misconcepten zijn fundamenteel anders dan gewone fouten en vormen een belangrijke barrière voor leren. Vaak zijn ze diep verankerd in de cognitieve structuur waardoor leerlingen er zich weinig bewust van zijn (M. Dam, 2025, p.5). Het belangrijke verschil tussen fouten en misconcepten wordt benadrukt door (Barton, 2018, p.36): “Fouten zijn meestal eenmalige gebeurtenissen, de leerling begrijpt het concept maar maakt een rekenkundige fout door onzorgvuldigheid. Misconcepten daarentegen zijn het resultaat van verkeerde overtuigingen”.

Diagnostische vragen zijn specifiek effectief voor het identificeren van misconcepten omdat de verkeerde antwoordopties zorgvuldig worden gekozen om specifieke misconcepten bloot te leggen. (STEM Learning, n.d., p.2) legt uit dat “een goede diagnostische vraag kan ook bewijs leveren van veel voorkomende misvattingen die door de leerling worden gehouden, wat progressie in het ontwikkelen van wetenschappelijk begrip kan verhinderen”.

De implementatie van diagnostische vragen in de Nederlandse praktijk laat zien dat docenten verschillende strategieën hanteren voor het nemen van vervolgbeslissingen, zie M. Dam, 2025, p.16-19. Zo vonden ze dat “deelnemers hoofdzakelijk heuristieken (vaste manieren van denken en werken) gebruiken om tot een beslissing te komen”. De meest genoemde vervolgacties zijn leerlingen die het fout hadden verlengde instructie geven en leerlingen die het goed hadden anderen laten helpen.

Uit internationaal onderzoek blijkt dat diagnostische vragen bijzonder krachtig zijn wanneer leerlingen een confidence-rating geven bij hun antwoord. (Third Space Learning, 2025) rapporteert dat “wanneer een leerling zelfverzekerd is over een onjuist antwoord, zij meer geneigd zijn het antwoord goed te onthouden in volgende toetsen”, wat het hypercorrectie-effect wordt genoemd. Dit effect maakt diagnostische vragen nog effectiever voor het doorbreken van hardnekkige misconcepten.

Kort samengevat bieden diagnostische vragen een efficiënte manier om misconcepten op te sporen die verder gaan dan gewone fouten. Zij ondersteunen alle fasen van formatief handelen, hoewel implementatie in de praktijk uitdagend blijft. Misconcepten zijn diep verankerde verkeerde overtuigingen die systematische aanpak vereisen, en diagnostische vragen met zorgvuldig ontworpen antwoordopties kunnen deze specifiek identificeren en aanpakken. De Nederlandse ervaring toont dat samenwerking tussen docenten in het ontwerpen van deze vragen de kwaliteit verhoogt en praktische implementatie faciliteert.

2.2 Transformaties

Het onderzoek is afgenomen in een 4e klas op een gymnasium bij het vak wiskunde B. De leerlingen hebben zojuist geleerd wat transformaties inhouden en hebben dus, als het goed is, al alle kennis en kunde die ze nodig hebben. Maar, de leerlingen hebben deze onderwijsperiode alleen specifieke transformaties geleerd bij specifieke basisfuncties. Hieronder staat een overzicht waarin per basisfunctie staat welke soorten transformaties ze bij de functie hebben geleerd.

		Basisfunctie		
		Machtsfuncties	Wortelfuncties	Exponentiële functies
Transformatie	Translaties	Ja	Ja	Ja
	Verm. x -as	Ja	Ja	Ja
	Verm. y -as	Nee	Nee	Ja

Transformaties in Nederland gebeuren vooral langs de algebraïsche weg. Er wordt dus vaak gevraagd: “Hoe is de functie $f(x)$ ontstaan vanuit de basisfunctie”.

2.3 Literatuur over transformaties

Onderzoek laat consequent zien dat leerlingen aanzienlijke uitdagingen ondervinden bij het toepassen van transformaties op functies, waarbij horizontale translaties vaak lastiger worden ondervonden dan verticale translaties. Dit blijkt bijvoorbeeld uit (Ana Elisa Lage, 2006, Vol.2-26): “In questions related to rigid transformations, students had more difficulties recognizing a horizontal translation than a vertical translation”. Dit wordt bevestigd door (Eisenberg & Dreifus, 1994, p.58), die zeggen dat “transformations which represent translation or stretching of a graph in the vertical direction seem to be more easily understood than similar transformations in a horizontal direction”. (Smith, 2009, p.23) hebben gekeken naar een goede manier van transformaties uitleggen en hebben gevonden “about 65% of the students could speak with meaning and use covariational reasoning to express their thoughts about function transformations”, wat aangeeft dat er wel degelijk ruimte is voor misconcepten.

Volgens (Ana Elisa Lage, 2006, Vol.2-28) lijkt het succes van leerlingen met transformaties sterk beïnvloed te worden door hun voorkennis van basisfuncties (“students could use transformations with more ease when they were already familiar with the basic function”). Dit suggereert dat het opbouwen van een stevige basis in basisfuncties belangrijk is voordat transformaties worden geïntroduceerd.

(Anabousy & Daher, 2015, table 1) laat zien dat vermenigvuldigingen met assen beter te doen zijn vergeleken met translaties, als men het grafisch toepast.

Wanneer meerdere transformaties gecombineerd worden, nemen de moeilijkheden voor leerlingen nog meer toe. “Candidates struggled with finding the general rule for a combination of transformations performed in sequence and accompanying notation in this regard.” (Sasman, 2011, p.10). Ook (Anabousy et al., 2014, table 2) geven aan dat de volgorde van transformaties belangrijk is en dat deze vaak ook door elkaar wordt gehaald.

(K. G. Rina Zazkis, 2003, p. 4.1) hebben gevonden dat de didactische aanpak onbedoeld kan bijdragen aan deze moeilijkheden. “We believe that one of the difficulties that learners have in understanding horizontal transformations of a function is a consequence of the instructional sequence in which the treatment of transformations of functions is presented in the context of exploring functions, rather than in the context of exploring transformations”.

Dat leerlingen transformaties lastig vinden is helemaal niet gek. Er gebeuren soms tegen-intuïtieve dingen, zoals dat een plus opeens in een min moet veranderen. Wanneer leerlingen functies als $y = (x-3)^2$ tegenkomen, verwachten ze aanvankelijk dat de grafiek van $y = x^2$ naar links is verschoven, terwijl deze in werkelijkheid naar rechts is verschoven. Dit is een veelvoorkomende fout en misconception volgens (P. L. Rina Zazkis & Gadowsky, n.d., Vol.4-460) “All the participants were asked to predict, check and explain the relationship between the graph of $y = x^2$ and the graph of $y = (x-3)^2$. [...] half of the students predicted the spatial location of $y = (x-3)^2$ incorrectly”.

In het kort wordt de tegen-intuïtiviteit van horizontale translaties lastig gevonden. Verticale translaties liggen de leerlingen een stuk beter, wellicht doordat het minder moeite kost om de transformatie $f(x)$ naar $f(x)+k$ grafisch uit te leggen (Eisenberg & Dreifus, 1994, p.58). Vermenigvuldigingen met assen wordt grafisch vaak als makkelijker ervaren dan translaties. Combinaties van transformaties, en met name de volgorde van de transformatie (samen met notatie), wordt al helemaal als lastig ervaren.

2.4 Goede diagnostische vragen

Het doel van diagnostische vragen is niet alleen het meten van kennis, maar vooral het zichtbaar maken van het denkproces van leerlingen en het identificeren van misconcepten. Dit maakt het mogelijk om gericht in te grijpen in het leerproces en om instructie aan te passen aan de behoeften van de leerlingen. Barton noemt 8 redenen (Barton, 2020b, p. 2.15) waarom hij diagnostische vragen gebruikt in zijn lessen. Daarnaast geeft hij 5 kenmerken voor een goede diagnostische vraag.

1. *They should be clear and unambiguous.* Antwoorden zoals $\frac{4}{6}$ en $\frac{2}{3}$ komen op hetzelfde neer. Als iemand $\frac{4}{6}$ antwoord, kan je dan met zekerheid zeggen dat de leerling geen breuken kan vereenvoudigen?
2. *They should test a single skill/concept.* Zijn grootste reden hiervoor lijkt te zijn dat hij duidelijkheid wil scheppen in waar een leerling fout is gegaan. Kan je een fout antwoord nog terugkoppelen aan een specifiek misconception als je 3 dingen in 1 vraagt?
3. *Students should be able to answer them in less than ten seconds.* Ook hier wil hij duidelijkheid. Als een leerling een minuut moet nadenken over een vraag, kunnen op heel veel plekken iets misgaan. Als leraar heb je dan slecht zicht over welk specifieke misconception de leerling heeft.
Hier moet wel bij worden gezegd dat Barton vooral makkelijker stof lesgeeft, zoals rekenen. Tien seconden is dus vaak genoeg voor hem. Andere richtlijnen zeggen dat leerlingen 1 minuut over de vraag mogen doen, waarbij je de antwoorden binnen 30 seconden kan interpreteren (Caroline Wylie, n.d.).
4. *You should learn something from each incorrect response without the student needing to explain.* Als aan het begin van een les van Barton leerlingen veel fouten maken op de diagnostische vragen, dan past hij zijn les aan (Barton, 2020b, Figure 2.74). Daarom wil hij dat antwoorden snel te interpreteren zijn voor de docent.
5. *It is not possible to answer the question correctly whilst still holding a key misconception.* Als je met een misconception op het goede antwoord komt, waarom stel je de vraag dan? Om zicht te krijgen op misconcepten toch?

2.5 Onderzoeksvraag

In dit onderzoek staat het ontwikkelen van diagnostische vragen omtrent transformaties (in 4 gymnasium) centraal. De onderzoeksvraag/onderzoekopdracht wordt daarmee: *Geef enkele effectieve diagnostische vragen omtrent (algebraïsche) transformaties van functies.* Daarmee hebben we weer een probleem, wat is namelijk een *effectieve* diagnostische vraag? We definiëren een *effectieve* diagnostische vraag, als een vraag die zo goed mogelijk voldoet aan alle kenmerken uit sectie 2.4.

In het kort gaan wij in dit onderzoek eerst een aantal vragen ontwikkelen (6 om precies te zijn), waarna we meerdere rondes van feedback van anderen en input van leerlingen gebruiken om de vragen bij te stellen, zodat ze uiteindelijk zo effectief mogelijk worden.

Chapter 3

Methode

In dit hoofdstuk beschrijf ik mijn uitgangspositie, namelijk de klas waarin in dit onderzoek heb afgenomen, hoe de vorige lessen eruit zagen en de vragen die ik tot dan toe had opgesteld. Vervolgens ga ik het hebben over mijn eerste feedbacklus; hoe mijn vragen veranderd zijn voordat ik de eindvragenlijst heb afgenomen bij mijn klas. Daarna analyseer ik de kenmerken van sectie 2.4 en kijk ik of mijn vragen hieraan voldoen. Tot slot ga ik in op hoe ik de input van leerlingen heb verwerkt en geef ik een schematisch overzicht hoe mijn diagnostische vragen mettertijd zijn veranderd.

3.1 Uitgangspositie

Deze periode werkt mijn gymnasium 4 wiskunde B klas met het hoofdstuk “Machten, exponenten en logaritmen” van de methode Getal & Ruimte. Het hoofdstuk begint met een paragraaf over machten met negatieve en gebroken exponenten, waarbij nadruk ligt op herleiden. De tweede paragraaf gaat over machtsfuncties en wortelfuncties en hun karakteristieken. Ook gaat het over hoe die karakteristieken (zoals het punt van symmetrie en randpunten) veranderen door translaties en vermenigvuldiging met de x -as. Dan komt er een paragraaf over exponentiële functies, waarbij weer karakteristieken worden besproken, maar ook weer hoe die veranderen onder transformaties (dit keer ook de vermenigvuldiging met de y -as).

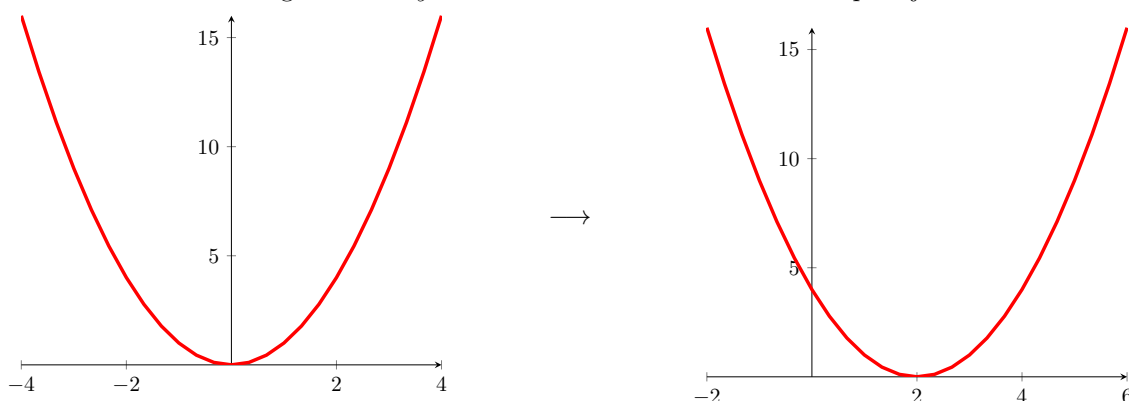
Van mijn eigen schooltijd kan ik me nog herinneren dat translaties en vermenigvuldigingen met assen vaak lastig waren om goed te krijgen. Fouten met plussen en minnen waren bijvoorbeeld veelvoorkomend. Met dit in mijn achterhoofd heb ik een paar lessen gegeven aan de leerlingen omtrent dit thema.

Bij het ontwerpen van de lessen hield in rekening met het volgende. In een boek van Barton (Barton, 2020b) (deze is later uitgebracht dan “Volgens Barton” (Barton, 2020a), in dit boek komt hij dan ook terug op bepaalde stukken uit zijn vorige boek en gaat hij verder in op hoe zijn lessen in elkaar steken) gaat het in paragraaf 3.5 over betekenis geven aan leerlingen. Met name gaat het erover dat een operatie van $+3$ ineens kan veranderen naar een -3 aan de andere kant van het $=$ -teken. Barton vindt het hierbij belangrijk dat het voor leerlingen duidelijk is *waarom* dit moet. Ook kan je in dit boek (Barton, 2020b, p. 3.6) werkbladen vinden met “Fill in the Gaps” opdrachten. Daarnaast wordt in dit boek gerefereerd naar variationtheory.com, iets dat Barton vaak zelf gebruikt in zijn lessen om transformaties van geometrische figuren uit te leggen. Hier wordt er bijvoorbeeld in <https://variationtheory.com/2018/03/04/sketching-quadratic-graphs/> een werkblad gegeven over “Fill in the Gaps” bij verschillende kwadratische functies. Gebaseerd hierop heb ik werkblad A geconstrueerd. Leerlingen moesten deze in de les voor de diagnostische vragen maken (ze kregen hier de hele les (van 45 minuten) voor (het was een werkles)).

Terwijl ik deze lessen aan het geven was heb ik de diagnostische vragen ontworpen aan de hand van de theorie uit hoofdstuk 2 in combinatie met het boek “Volgens Barton” (Barton, 2020a). In het boek geeft Barton meerdere keren voorbeelden van vragen op zijn diagnostische-vragen-site (Barton, 2020a, 7.2, 7.3, 8.2, HS 11). Hij besteedt ook veel aandacht aan hoe je die diagnostische vragen moet (of zou moeten) samenstellen (Barton, 2020a, HS 11) als je dit nog nooit eerder hebt gedaan. Met dit op zak (samen met de literatuur van sectie 2.3) heb ik eerst zelf diagnostische vragen ontworpen. Dit kwam eruit.

Diagnostische vragen helemaal aan het begin.

1. De grafiek van $y = x^2$ wordt verschoven zoals in het plaatje.



Wat is het functievoorschrift van de functie op het rechter plaatje?

A. $y = (x - 2)^2$

C. $y = 2x^2$

B. $y = (x + 2)^2$

D. $y = x^2 - 2$

2. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{x+1} + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, met } 2} ???$$

a. $2\sqrt{x+1} + 6$

C. $2\sqrt{x+1} + 12$

b. $\sqrt{2x+1} + 6$

D. $\sqrt{2x+2} + 12$

3. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}, 2)} ???$$

a. $3\frac{1}{2} - \sqrt{2x+4}$

C. $5 - \sqrt{2x+1}$

b. $3\frac{1}{2} - \sqrt{2x-4}$

D. $5 - \sqrt{2x-1}$

4. Welke transformatie hoort op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{???} y = 2^{2x-1}$$

a. Translatie (1,0).

c. Verm. x -as, met 2.

B. Translatie (-1,0).

D. Verm. x -as, met 4.

5. Welke transformaties komen er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^x \xrightarrow{???} y = 2^{2x-3}$$

a. Translatie (0, -3) daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$.

C. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$

b. Translatie (-3,0) daarna verm. y -as met 2.

d. Verm. y -as met $\frac{1}{2}$ daarna translatie (3,0).

6. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^{2x} + x^2 + \sqrt{3x+2} \xrightarrow{\text{translatie } (5,5)} ???$$

A. $y = 2^{2x-10} + (x-5)^2 + \sqrt{3x-13} + 5$

C. $y = 2^{2x+10} + (x+5)^2 + \sqrt{3x+17} + 5$

b. $y = 2^{2x-10} + (x-5)^2 + \sqrt{3x-13} + 15$

d. $y = 2^{2x+10} + (x+5)^2 + \sqrt{3x+17} + 15$

3.2 Iteraties

Vanuit de uitgangspositie ben ik eerst meerdere stappen doorlopen voordat ik de vragen heb afgenomen in de klas. Een schematisch overzicht is te vinden in sectie 3.3.

Eerst heeft mijn vakcoach feedback gegeven op de vragen zoals ze hierboven staan (zie sectie 4.1.1). Daarna heb ik de les gegeven met werkblad A. Aan de hand hiervan heb ik de vragen weer aangepast (zie sectie 4.1.2). Ook heb ik in tijdens dezelfde les een aantal leerlingen (4 om precies te zijn) gevraagd om een paar opgaven op te lossen terwijl ze hardop nadenken (zie sectie 4.1.2). Na dit verwerkt te hebben heeft mijn vakdidacticus feedback op de vragen gegeven (zie sectie 4.1.3).

Toen dit alles gedaan en aangepast was wilde ik met sectie 2.4 in mijn hoofd nu zeker weten of aan alle 5 de kenmerken van Barton werden voldaan. Daarom heb ik bij elke vraag uitgewerkt welk misconception voor welke antwoordoptie zou leiden. Deze analyse staat in bijlage B.

Toen deze feedbacklus klaar was heb ik de vragen afgenomen in de klas, waarbij alle leerlingen via Google Forms de vragen hebben beantwoord. De leerlingen waarmee ik het “hardop denken” heb gedaan waren alle 4 afwezig bij deze les (toevallig wist ik dit al van tevoren, daarom heb ik ook deze leerlingen gekozen). Dit zijn de vragen, zoals ze in de Google Forms stonden.

Met de resultaten van deze laatste vragenlijst heb ik de vragen een laatste keer aangepast. Dit proces staat in sectie 4.

3.2.1 Hardopdenksessie

De hardopdenksessie heb ik met 4 leerlingen gedaan. Deze leerlingen waren niet aanwezig bij het afnemen van de vragenlijst (zo had ik de leerlingen ook uitgezocht).

Tijdens de hardopdenksessie heb ik individuele leerlingen uitgenodigd om een diagnostische vraag stap voor stap te beantwoorden, terwijl ze hun denkproces hardop verwoorden. Ik, als onderzoeker stel alleen verduidelijkende vragen als het denkproces van de leerlingen nog incompleet is, maar ik probeer zo min mogelijk sturing te geven.

Helaas was het vanwege privacy redenen niet gelukt om deze gesprekken op te nemen. Toch heb ik zo goed mogelijk geprobeerd hun denkpatroon te herconstrueren, zodat er een aantal responsen (en indirect dus ook aanpassingen aan de diagnostische vragen) over zijn gebleven (zie sectie 4.1.2).

De antwoorden van de leerlingen werden tegen de stelregels van Barton aan gehouden (zie sectie 2.4). Als aan een kenmerk niet voldaan werd de vraag aangepast zodat deze dat wel was.

3.2.2 Vragenlijst

Tot slot (als laatste feedbacklus op mijn vragen) heb ik een vragenlijst afgenomen in de klas. De vragenlijst bestond uit deze vragen en dit proces is beschreven in hoofdstuk 4.

De vragenlijst heb ik afgenomen met Google Forms, waarbij elke vraag zijn eigen pagina heeft gekregen (om terugkijken te vermijden). Ik heb de diagnostische vraag (in hetzelfde format als in de bijlage) gesteld, gevolgd door de vraag:

Leg je keuze uit in ongeveer 2 zinnen. *Bijvoorbeeld: Antwoord A klopt niet, want deze verschuift de grafiek de verkeerde kant op. Antwoord B kan ook niet omdat de haakjes zijn vergeten en D kan al helemaal niet.*

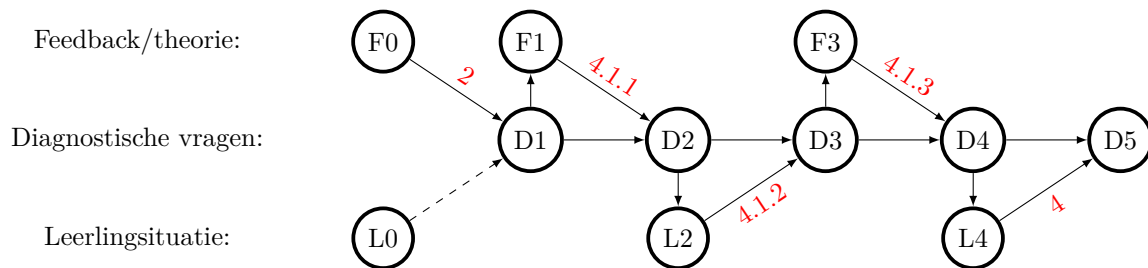
Per diagnostische vraag beantwoorden ze dus eerst de vraag, gevolgd door een verklaring voor hun antwoord.

Uiteindelijk hebben 14 leerlingen de vragenlijst ingevuld.

Ook hier werden de vragen geanalyseerd aan de hand van de stelregels van goede diagnostische vragen, zie sectie 2.4.

3.3 Overzicht

De diagnostische vragen hebben deze lus hieronder doorlopen. Een inkomende pijl geef een stroom van informatie en aanpassingen weer. Onder dit diagram zijn de knopen van de graaf toegelicht.



- L0. De uitgangssituatie van de leerlingen: De theorie omtrent veel transformaties en basisfuncties is al behandeld, werkblad **A** is niet afgenomen.
- F0. Theorie: Hoofdstuk **2** en (Barton, **2020a**, HS 11).
- D1. Het begin van de diagnostische vragen, te vinden in **startvragen**. Zoals het diagram weergeeft zijn deze opgesteld aan de hand van de theorie van F0 en de beginsituatie van de leerlingen L0 (de beginsituatie van de leerlingen heb ik hierin minder meegenomen dan de theorie, vandaar de stippellijn).
- F1. Feedback van vakcoach, zie sectie **4.1.1**.
- D2. Diagnostische vragen na feedback van vakcoach.
- L2. De leerlingen in de les van werkblad **A**, dezelfde les waarin ik aan 4 leerlingen de “hardop denk”-vragen heb gesteld.
- D3. Diagnostische vragen na de les met het werkblad en de “hardop denk”-vragen, dit proces is beschreven in sectie **4.1.2**.
- F3. Feedback van vakdidacticus, zie sectie **4.1.3**.
- D4. De diagnostische vragen na de eerste feedbacklus, zie de **vragen**. Een analyse van de kenmerken van sectie **2.4** op deze vragen staat in bijlage **B**. Dit zijn de vragen zoals ik ze heb afgenomen in de klas voor sectie **4**.
- L4. De leerlingen in de les van de vragenlijst (waarin ik de diagnostische vragen afneem).
- D5. De uiteindelijke versie van de diagnostische vragen, dit proces staat in sectie **4**.

Chapter 4

Resultaten

Hoet doel wat om diagnostische vragen te ontwikkelen omtrent (algebraïsche) transformaties van functies. Deze resultaten bestaan uit 2 delen. Ten eerste al het voorwerk, hoe zijn de vragen, zoals ze werden afgenomen in de vragenlijst, tot stand gekomen. Ten tweede de resultaten van de vragenlijst, en hoe deze de laatste feedbacklus hebben gevormd voor de definitieve vragen. Tot slot wordt in dit hoofdstuk de definitieve diagnostische vragen over (algebraïsche) transformaties van functies gepresenteerd.

4.1 Herformulering van vragen

Deze sectie geeft aan hoe de diagnostische vragen, zoals ze zijn afgenomen in de vragenlijst, tot stand zijn gekomen. Er wordt met name beschreven hoe ik de vragen uit de uitgangspositie (zie sectie 3.1) heb aangepast. Dit proces bestaat uit 3 delen, mijn vakcoach, input van leerlingen en input van de vakdidacticus.

Na deze herformulering heb ik de vragen geanalyseerd op de 5 kenmerken van Barton, 2020a, zie bijlage 2.4.

4.1.1 Vakcoach

Ik heb het met mijn vakcoach over deze vragen gehad. Dit waren de opmerkingen die hij had.

- Voor machtsfuncties heb ik het niet gehad over verm. x -as.
- Vraag 1: ipv “Wat is het functievoorschrift van de functie op het rechter plaatje”, “Welke functie past het beste bij de rechter grafiek?”.
- Op het moment vraag ik 1 keer iets grafisch, 2 keer wat de translatie was en 3 keer wat de functie is na translatie. Op veel toetsen wordt vaker gevraagd leg uit hoe ... is ontstaan uit Daarmee is het wellicht relevanter op 3 keer te vragen wat de translatie was en 2 keer wat de functie is na translatie. *Omdat ik zicht wil krijgen op misconcepties bij transformaties, met name of alle plusjes en minnetjes goed gaan (en niet of er misconcepties zijn bij inzichtsvragen), heb ik besloten dit niet te verwerken in de vragen.*
- Bij vraag 5 kan je bij optie **b**. beter de translatie (3,0) vragen, zodat je het misconcept met de verm. van de y -as isoleert, en niet samen stopt met het misconcept van de horizontale translatie.
- Ik heb geen vraag gesteld waarbij er $-x$ in de functie staat, het is ook relevant om te kijken hoe de minnen en plussen dan worden neergezet. *Uiteindelijk heb ik vraag 3 aangepast naar de functie $3 - \sqrt{1 - 2x}$.*
- Bij vraag 6 leek hem het misconcept van +15 raar. Origineel dacht ik dat leerlingen konden denken dat je voor elke functie hier +5 moest toevoegen. Mijn vakcoach dacht dat het relevanter was om de translatie te veranderen naar (5, -5), zodat je kan kijken of de plussen en minnen overal goed gaan (met 4 opties voor elk van de plus-min opties).

4.1.2 Leerlingen

In een les voorafgaand aan de vragenlijst heb ik de leerlingen aan de slag gezet met werkblad A. Tijdens deze les heb ik 4 leerlingen een aantal diagnostische vragen die ik destijds al had hardop laten uitwerken (zie sectie 3.2.1) (achteraf gezien was het misschien wat mooier geweest meer van deze leerlingenresponsen te hebben, maar dat was helaas niet gelukt omdat ik vanwege privacy redenen de antwoorden niet mocht opnemen, de quotes geven dus ongeveer aan hoe het is verlopen en niet exact).

Dit zijn de aanpassingen die ik heb gemaakt op basis van deze les.

- Vraag 4: De opties **e**. Translatie $(2, 0)$ en **f**. Translatie $(-2, 0)$ heb ik toegevoegd. Het boek introduceert de translatie $(p, 0)$ als $y = g^x$ gaat naar $y = g^{x-p}$. Het misconcept dat $y = g^{2x}$ gaat naar $y = g^{2x-p}$ (waar de translatie dus niet tussen haakjes komt) kan hierdoor ontstaan (zoals ik zag bij 1 van de leerlingen). Een leerling was in de les ook precies dit vergeten (en zette geen haakjes bij de translatie $(\frac{3}{4}, 0)$ en kwam zo niet op de juiste functie uit op het einde).
- Vraag 3: Optie **a**. is nu $5 - \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$ (dit was voordat ik de verandering toe had gepast van mijn vakcoach). Ook dit is teweeg gebracht door het consistent toepassen van haakjes bij verschuivingen naar links en rechts.
- Vraag 4: Het feit dat er 2 mogelijke antwoorden zijn was verwarrend, ik heb de vraagstelling aangepast.
- Vraag 5: Het is al duidelijk welk antwoord het moet zijn als je nog niks snapt: Alles wat er 3 keer in staat klopt (zo blijkt dat b,c,d gemeen hebben dat er $(3, 0)$ staat, dan hebben a,c,d gemeen dat er $\frac{1}{2}$ staat, en hebben a,b,c gemeen dat er eerst word getransleerd).
- Vraag 2: Een leerling die ik hardop na liet denken had antwoord B gekozen. Zijn gedachtegang ging was als volgt: “Je moet vermenigvuldigen met de x -as, dus doe je de x keer 2, dus B.”
- Vraag 3: Een leerling had veel sturing nodig bij haar antwoord, de gedachtegang was als volgt: “Je schuift 2 omhoog, dus krijg je 5. Dan schuif je $\frac{1}{2}$ naar rechts, dan krijg je... je krijgt... geen idee...”, ik: “Oké, wat doe je normaal gesproken bij verschuivingen.”, leerling: “Iets met de x .”, ik: “Wat met de x ?”, leerling: “Iets met min of plus.”, ik: “Je zei dat je naar rechts schuift, dus is het dan min of plus?”, leerling: “Het is altijd het tegenovergestelde van wat je wilt, ik denk + dus dan moet ik – doen. Dan wordt het $2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$, dus D.”, ik: “Is dit nou een goede manier om de onthouden of je min of plus moet gebruiken? Hoelang ga je dit onthouden? Helemaal tot de toets in 4 weken?”, leerling: “Nee...”.
- Vraag 4: Leerling: “Ik denk B.”, ik: “Waarom?”, leerling: “ -2 wordt plus 2 als macht en $-3 + 2 = -1$ ”, ik: “Moest je geen haakjes zetten als je translaties deed”, leerling: “Oja... Dan is het A, je doet dan -1 keer 2 is -2 en $-3 - -2 = 1$ ”, ik: “En is dat het enige antwoord dat mogelijk is?”, leerling: “Ja, omdat A het is zullen b,c,d het niet zijn, en e en f kunnen niet omdat dit een translatie is.”, ik: “Waarom is dit een translatie.”, leerling: “Omdat er iets bij de x veranderd.”, ik: “Maar werk anders is optie F uit, wat krijg je?”, leerling: “Nou... Je krijgt $4 \cdot 2^{2x-3}$.”, ik: “En kan je dit verder vereenvoudigen.”, leerling: “Nee”, ik: “Ook niet als je $4 = 2^2$ gebruikt?”, leerling: “Ja dan wel, dan wordt het 2^2 . En dan moet ik exponenten optellen, dat wordt dan $2x - 1$.”, ik: “En valt je nu iets op?”, leerling: “Uhm... dat is deze functie hier (wijst naar de functie rechts van de pijl met vraagtekens erboven)”, ik: “En dat betekent?”, leerling: “Dat betekent dat ook F kan”, ik: “En kan E?”, leerling: “Nee, dat wordt 2^1 en dat is niet genoeg”.

4.1.3 Vakdidacticus

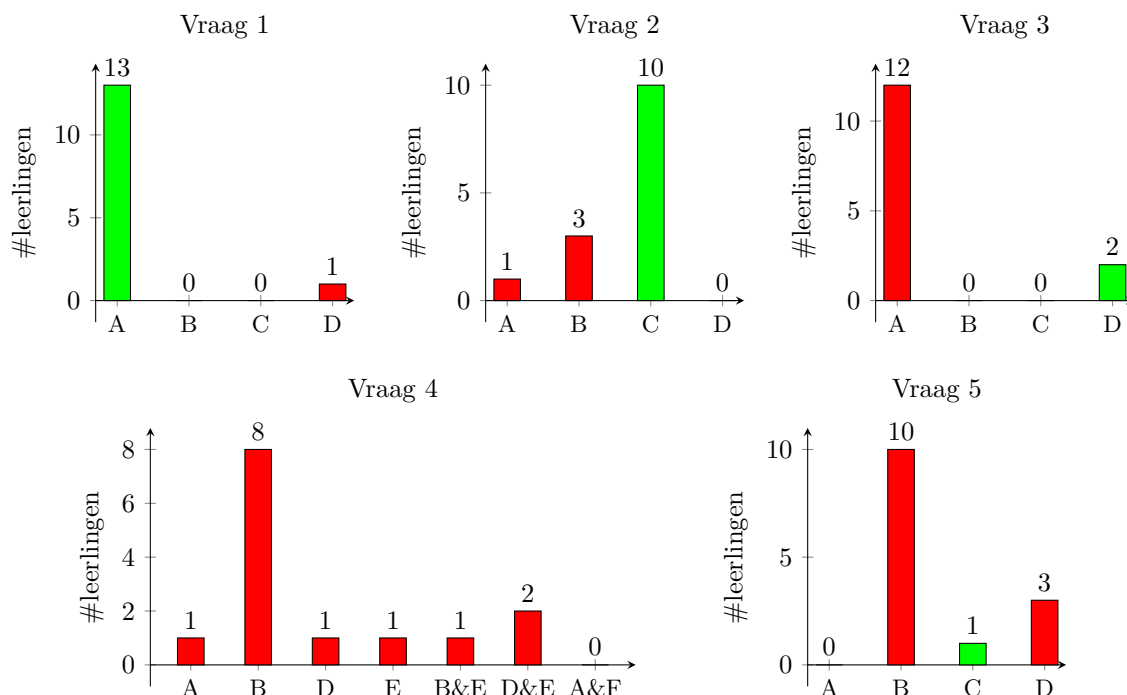
Door de feedback van Peter Kop zijn mijn vragen als volgt veranderd.

- Vraag 1: De feedback hield in dat de leerlingen aan de hand van de grafiek konden aflezen dat de top op $(2, 0)$ ligt, in plaats van de transformatie uitvoeren. Hierdoor heb ik de grafieken weggehaald.
- Vraag 3: Er werd gesteld dat het oplossen van de vraag meer dan 10 seconden duurde, aangezien de mintekens van de functie $3 - \sqrt{1 - 2x}$ nogal veradelijk kunnen zijn. Daardoor heb ik de functie aangepast naar $3 - \sqrt{2x}$.

- Vraag 4: Het was subtiel dat er meerde antwoordmogelijkheden konden zijn. Ik heb geprobeerd dit extra duidelijk te maken in de uiteindelijke vragenlijst die ik heb afgenomen.
- Vraag 5: De vraag was of dubbele transformaties belangrijk waren. Mijn idee was hierbij dat dubbele transformaties weldegelijk belangrijk zijn, het is namelijk relevant welke je eerst toepast.
- Vraag 6: Men kon zonder het te begrijpen het goede antwoord gokken, daarnaast was deze vraag nogal groot en veel werk. Hierdoor heb ik deze vraag eruit gehaald.
- Generiek: Leerlingen moeten meerdere strategieën gebruiken om de vragen op te lossen, namelijk de transformatie toepassen, en bij vraag 4, werken vanuit de antwoordmogelijkheden.
- Generiek: De vragen kosten meer dan 10 seconden rekenwerk. Dit is waar. Ik heb hier meer onderzoek naar gedaan en vond een andere bron die een limit van 1 minuut handhaafde (Caroline Wylie, [n.d.](#)), vooral omdat hij de 10 seconden regel van Barton te kort vond. Daarnaast heb ik vraag 6 weggehaald, een vraag die zeker meer dan 10 seconden zou duren.
- Generiek: Leerlingen krijgen “beloning voor procedurele kennis en niet voor inzicht in het geheel”. Diagnostische vragen moeten volgens Barton inzicht geven in de misvattingen die bepaalde leerlingen hebben. Als ze misvattingen hebben waardoor zij procedurele kennis niet kunnen toepassen, dan gaan het al helemaal zicht bij inzichtsvragen.

4.2 Resultaten van de vragenlijst

Nu al het voorwerk compleet is (zie sectie 4.1 en bijlage B) heb ik de vragen uit bijlage B bij 14 leerlingen afgenomen. Elke leerling gaf antwoord op de diagnostische vraag en voor elke andere antwoordoptie waarom het desbetreffende antwoord fout was. Hieronder staan de resultaten per vraag (een groene balk is een correct antwoord en een rode balk is een fout antwoord).



Hieronder staat een tabel met alle misconcepten bij leerlingen met hun frequentie (hierbij was elke input van elke leerlingen van elke vraag meegenomen). Let hier wel op: veel misconcepten zijn maar enkele keren voorgekomen, maar kunnen wel groter zijn dan ze voordoen als de 2 grote misconcepten: "haakjes vergeten" en "volgorde transformaties" worden weggewerkt.

De volledige analyse waarbij dieper ingegaan wordt op de antwoorden van de leerlingen en hun beweegredenen waarom andere antwoordopties fout waren, samen met de effectiviteit van de vraag en antwoordopties bevindt zich in bijlage C.

Nr.	Soort misconcept / foutreden	Freq.	Korte toelichting
1	Haakjes vergeten	12	Komt voor bij polynoom-, wortel- en exponentiële functies.
2	Verm. met x -as doet nooit iets met de exponent	3	In het geval dat 2^x wordt vermenigvuldigd met 4 krijg je wel degelijk 2^{x+2} , door herleiden
3	Zoeken naar translatie-parameters die "zichtbaar" zijn	2	Waargenomen bij zoekpogingen naar " $\frac{1}{2}$ " in vraag 3.
4	Verkeerde richting translaties	1	Leerlingen verwisselen de horizontale richting bij translaties ($x+2$ ipv $x-2$).
5	Volgorde transformaties fout	13	Kwam vaak voor in combinatie met andere misconcepten.
6	Verwisseling x - en y -coördinaat	1	Leerlingen denken dat een verschuiving in x de y beïnvloedt (of omgekeerd).
7	Verm. met x -as met 2 betekent $x \rightarrow 2x$	1	

Hieruit blijkt dat er 2 misconcepten veruit groter zijn dan alle andere, namelijk nummers 1 en 5. Als docent in de lespraktijk was deze vragenlijst dus effectief geweest om de grootste misconcepten bij de leerlingen te constateren en vervolgens te beslissen wat nog herhaald zou moeten worden/wat de volgende handelingen zijn.

4.2.1 De laatste aanpassingen

Hier staat per vraag kort beschreven waarom de vraag (en antwoordmogelijkheden) wel of niet effectief was (aan de hand van de kenmerken van Barton) en of de vraag nog is veranderd of niet. De complete laatste feedbacklus, namelijk hoe de vragen zijn veranderd aan de hand van deze vragenlijst, staat volledig beschreven in bijlage C.

Vraag 1

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag heeft zijn werk goed gedaan, we kregen namelijk 1 leerling te zien die een misconcept had en daardoor ook de verkeerde optie heeft gekozen. Vanuit de redenen dat andere antwoordmogelijkheden niet goed waren (hierboven), kon men 2 verkeerde soorten van redenen zien. De ene hoorde bij vraag C, maar was omdat de leerling een rede opgaf die ook kon horen bij vraag B, dus dit kan duiden op een gewone fout/luigheid van de leerling en niet een ongedetecteerd misconcept. De andere hoorde bij vraag D, de haakjes. Alhoewel deze reden niet volledig klopt, het geeft niet aan dat er verborgen misconcepten zijn. Al met al zijn alle leerlingen met een misconcept eruit gehaald. Precies wat Barton van ons wil.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): A is het goede antwoord. Daarnaast hebben we gezien dat optie D ook goed is, omdat we iemand met het verwachte misconcept hebben gedecteerd. Niemand met dat misconcept heeft iets anders gekozen. Opties B en C zijn niet gekozen, maar er waren ook geen leerlingen met dat specifieke misconcept. Veel leerlingen hebben bij optie B het misconcept dat je kon hebben goed opgenoemd, wat aangeeft dat mijn leerlingen hier expliciet bewust van zijn, iets dat niet voor iedereen kan gelden. Bij vraag C was dit ongeveer de helft. Daarom stel ik dat optie B beter was dan optie C. Wat zich heeft voorgedaan, namelijk dat $x^{2-2} = x^0 = 1$ er niet tussen stond, kunnen we daarom gebruiken in plaats van optie C. Hiervoor zal ik de functie vervangen door x^4 , dan wordt het namelijk $x^{4-2} = x^2$.

Vraag 2

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag heeft zijn werk goed gedaan, we kregen 4 leerling te zien die misconcepten hadden en daardoor ook verkeerde opties hebben gekozen. Er zijn vrijwel geen verkeerde redenen genoemd bij de leerlingen die het goed hadden, daardoor was er geen misconcept bij de andere leerlingen en hebben wij een *compleet* beeld gekregen van alle misconcepten (hier is dus aan kenmerk 5 van sectie 2.4 voldaan).

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): C is het goede antwoord. Leerlingen met het desbetreffende misconception hebben A en B genoemd, dus ook deze opties dienen te blijven. Optie D is twijfelachtig, wellicht dat deze vervangen zou kunnen worden door $\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+3$, maar dan kan met wellicht zonder het goede antwoord te weten het goede antwoord al deduceren omdat dan alleen A de gemeenschappelijke eigenschappen heeft van B en C. Daarom heb ik optie D onveranderd gelaten.

De uiteindelijke vraag blijft dus hetzelfde.

Als men deze diagnostische vraag als tool gebruikt, zou dit een mooi moment zijn om in te springen en je les wellicht te veranderen. Een aanzienlijk deel van de leerlingen had de opgave fout, ze hadden een misconception, waardoor het onverstandig is nieuwe stof te behandelen over dit onderwerp. Daarom is wellicht een korte terugblik aan het begin van de les handig.

Vraag 3

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): Deze vraag hadden heel veel leerlingen fout. Waarschijnlijk heeft de docent iets gedaan waardoor deze misconcepten zijn ontstaan. Dit is een moment in de les (zeker als je deze afneemt aan het begin van de les) om alles overhoop te gooien en nog een les te geven over de basis van translaties, wanneer je wel haakjes gebruikt en wanneer niet.

Is dit een effectieve vraag: Niet helemaal, er zijn leerlingen met verschillende misconcepten (namelijk haakjes hoeven niet en je ziet de $\frac{1}{2}$ niet terug in het antwoord) op dezelfde optie gekomen. Dit is in strijd met punt 4 van sectie 2.4.

Dit moet worden bijgesteld.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Naast A en D zijn er ook nog de antwoordmogelijkheden B en C. Deze werden niet genoemd en aangezien de vraag veel fout ging zijn deze mogelijkheden weinig getest. Het misconception van vraag C, hadden we al getest in vraag 1, dus dit hoeven wij niet nogmaals te doen. Daarnaast moet bij het bijstellen worden gelet dat de misconcepten hierboven op andere antwoorden uitkomen.

Vraag 4

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag duurt wellicht te lang. Daarnaast kan het als docent lastig zijn om een vraag met meerdere keuzemogelijkheden snel te interpreteren, omdat er veel combinaties van antwoorden mogelijk zijn (hierdoor heb ik de vraag anders verwoord).

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Mogelijkheid D is goed, omdat dit een misconception eruit heeft weten te halen. Ook optie B is goed, omdat veel leerlingen met een misconception dit hebben gekozen. A en F zijn correct. E werd 4 keer gekozen, ook al is het onderliggende misconception onbekend. Antwoord C werd nooit gekozen, en dat terwijl optie D twee misconcepten in 1 heeft. Dit komt waarschijnlijk doordat deze leerlingen vaak haakjes vergeten (zoals naar boven is gekomen in vraag 3).

Vraag 5

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): Deze vraag hadden wederom heel veel leerlingen fout. Wellicht was de vraag te lastig/kon de vraag makkelijker. We hadden bijvoorbeeld de exponentiële functie weg kunnen laten.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Optie B was goed, zowel als optie D omdat veel leerlingen dit misconception hadden. Optie A, omdat dat er maar 1 misconception in zat (versus B met 2) had niemand gekozen, maar voor compleetheit (zodat je niet de optie kan gaan kiezen met de meeste andere antwoorden die erop lijken) heb ik deze erin gelaten. Optie C was correct.

4.2.2 De definitieve vragen

Hier presenteren wij voor compleetheit alle vragen nogmaals (dit zijn dus de definitieve vragen die de onderzoeksvraag beantwoorden, zie sectie 2.5).

Wij maken hierin wel nog een keuze, met name omdat vraag 4 (zie sectie C.4) nu bestaat uit 6 deelvragen, hebben we ervoor gekozen alleen 2 van deze deelvragen te stellen. Leerlingen hebben het vaakst antwoord B en antwoord E gegeven, daarom zijn precies die 2 deelvragen in sectie C.4 gekozen.

Definitieve vragen na vragenlijst

1. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} ???$$

A. $y = (x - 2)^4$

c. $y = x^2$

b. $y = (x + 2)^4$

d. $y = x^4 - 2$

2. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{x+1} + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, met } 2} ???$$

a. $2\sqrt{x+1} + 6$

C. $2\sqrt{x+1} + 12$

b. $\sqrt{2x+1} + 6$

d. $\sqrt{2x+1} + 12$

3. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{2x - \frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}, 3)} ???$$

a. $3 + \sqrt{2x - 1}$

c. $3 + \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$

b. $\frac{1}{2} + \sqrt{2x - 3\frac{1}{2}}$

D. $3 + \sqrt{2x - 1\frac{1}{2}}$

4. Welke uitsprak(en) kloppen (niet)?

$$(I) : \quad y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} y = 2^{2x-1}$$

$$(II) : \quad y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, met } 2} y = 2^{2x-1}$$

a. I klopt, maar II niet.

c. I en II kloppen allebei.

b. II klopt, maar I niet.

D. I en II kloppen allebei niet.

5. Welke transformaties komen er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x \xrightarrow{???} y = 2x - 3$$

a. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met 2.

C. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$.

b. Verm. y -as met 2 daarna translatie (3,0).

d. Verm. y -as met $\frac{1}{2}$ daarna translatie (3,0).

Chapter 5

Conclusie

Misconcepten zijn fundamenteel anders dan gewone fouten en vormen een belangrijke barrière voor leren. Vaak zijn ze diep verankerd in de cognitieve structuur waardoor leerlingen er zich weinig bewust van zijn. M. Dam, 2025, p.5. Het belangrijke verschil tussen fouten en misconcepten wordt benadrukt door (Barton, 2018, p.36): “Fouten zijn meestal eenmalige gebeurtenissen, de leerling begrijpt het concept maar maakt een rekenkundige fout door onzorgvuldigheid. Misconcepten daarentegen zijn het resultaat van verkeerde overtuigingen”.

Diagnostische vragen vormen een waardevol instrument voor het identificeren van misconcepten bij leerlingen, zo stellen ze de leraar in staat om eenvoudiger formatief te handelen, zie sectie 2.1. Aangezien al bestaande diagnostische-vragen-sites beperkt waren in hun collecties van vragen voor algebraïsche transformaties (in 4 gymnasium) heeft dit onderzoek zich hierop gericht. Het doel was het creëren van vragen die voldoen aan de vijf kenmerken van Barton (zie sectie 2.4): duidelijkheid, focus op één concept, korte beantwoordingstijd, interpreteerbare antwoorden, en onmogelijk goed te beantwoorden met een misconcept.

De methodologie bestond uit een iteratieve ontwikkelingsproces met meerdere feedbacklussen. Naar aanleiding van literatuuronderzoek over veelvoorkomende misconcepten bij transformaties, werden zes diagnostische vragen ontworpen. Deze vragen doorliepen verschillende fasen van verbetering: feedback van een vakcoach, input van leerlingen tijdens hardopdenksessies, feedback van een vakdidacticus en uiteindelijk een vragenlijst bij 14 leerlingen.

Tijdens elke iteratie werden de vragen aangepast naar aanleiding van de feedback/resultaten. Zo wees de vakcoach op ontbrekende concepten en onduidelijke formuleringen, de hardopdenksessie wees op specifieke misconcepten, zoals het vergeten van haakjes bij transformaties en de vakdidacticus meldde dat vragen te complex waren en meer dan 10 seconden duurden, wat leidde tot het verwijderen van de laatste vraag.

De uiteindelijke vragenlijst met deze vragen toonde significante resultaten: terwijl vraag 1 door 13 van de 14 leerlingen correct werd beantwoord en vraag 2 door 10 van de 14, hadden vragen 3, 4 en 5 hoge foutpercentages (met 2, 0 en 1 leerling(en) die het correcte antwoord gaven, respectievelijk). Deze resultaten identificeerden specifieke misconcepten: leerlingen hadden moeite met het correct toepassen van haakjes bij transformaties, verwarring over wat werd vermenigvuldigd bij vermenigvuldiging met assen, en problemen met de volgorde van gecombineerde transformaties. Aan de hand van de vragenlijst werden de vragen een laatste keer aangepast.

De bevindingen tonen de effectiviteit aan van deze diagnostische vragen omtrent algebraïsche transformaties van functies in 4 gymnasium. Het iteratieve proces zorgde voor verfijning van de vragen en het afstemmen op werkelijke leerlingen en misconcepten, hierdoor zijn de diagnostische vragen zo effectief mogelijk geworden.

Uit dit onderzoek neem ik mee dat diagnostische vragen een krachtig middel zijn om misconcepten te identificeren. Iedere leerling (in dit onderzoek) met een misconcept heeft de diagnostische vraag niet juist kunnen beantwoorden! Samen met de theorie over het nut van diagnostische vragen en hun kracht om formatief te kunnen handelen zorgt dit onderzoek ervoor dat ik diagnostische vragen zeker verder zal gaan gebruiken in mijn eigen lespraktijk.

5.1 Discussie

Diagnostische vragen bedenken en ontwikkelen is lastig, ondanks de zorgvuldige voorbereiding bleken sommige vragen nog steeds problematisch in de praktijk. Dit benadrukt het belang van uitgebreid testen met de leerlingen voordat vragen definitief worden vastgesteld. Een belangrijke methodologische overweging betreft daarmee de hardopdenksessies. In toekomstig onderzoek zouden antwoordopties bij hardop denken niet gegeven

kunnen worden, omdat dit het natuurlijke denkproces van leerlingen kan beïnvloeden en een vertekend beeld kan geven van hun werkelijke misconcepten. Leerlingen zouden eerst zelfstandig tot een antwoord moeten komen voordat ze de keuzemogelijkheden te zien krijgen.

Verder zou het fijn zijn om meer resultaten te verzamelen van de hardopdenksessies. Mij was het niet gelukt om de gesprekken op te nemen, maar in een vervolgonderzoek is dit misschien wel mogelijk. Als men weinig aanpassingen hoeft te maken na het afnemen van de vragenlijst zijn de vragen effectief geweest. Om de vragen zo effectief mogelijk te krijgen, voordat ze in de vragenlijst terecht komen is het enige moment van leerlinginput dat je hebt de hardopdenksessies. Veel responsen bij de hardopdenksessies zijn dus handig en moeten niet worden onderschat in een vervolgonderzoek.

Daarnaast zou er een “anders, namelijk” optie bij het uittesten van de vragen kunnen worden toegevoegd, zo voorkom je het geval dat de optie er niet tussen staat. Dit werd duidelijk bij vraag 1, waar twee leerlingen beweerden dat het juiste antwoord ontbrak omdat zij transformaties bij exponentiële functies verwarren met die bij polynomen.

De resultaten wijzen op specifieke gebieden waar extra aandacht nodig is in het wiskundeonderwijs bij deze leerlingen. Precies het beoogde doeleinde dat de diagnostische vragen hadden. Het hoge foutpercentage bij vraag 3 suggereert dat het gebruik van haakjes bij wortelfuncties een systematisch probleem is dat verdere instructie vereist. Dit type inzicht maakt diagnostische vragen waardevol voor het aanpassen van lessen op basis van geïdentificeerde misconcepten.

Chapter 6

Impact

6.1 Wat zijn de doelen?

Het primaire doel van mijn onderzoek was het verbeteren van formatief toetsen bij algebraïsche transformaties. Uit mijn onderzoek bleek dat leerlingen specifieke misconcepten hebben bij haakjes bij wortelfuncties, transformatierichtingen en gecombineerde transformaties. De diagnostische vragen die ik ontwikkelde deden hun werk, leerlingen die voor een verkeerd antwoord gingen hadden vaak het verwachte specifieke misconcept. Barton, 2020a heeft in zijn boek argumenten gegeven waarom hij diagnostische vragen dagelijks gebruikt in zijn lessen en, ik moet toegeven, hierdoor (in combinatie met mijn onderzoek) ben ik overtuigd van hun nut. Vandaar dat mijn doel is deze kennis (over diagnostische vragen) te verspreiden naar andere docenten.

6.2 Wat was mijn impactactiviteit?

Voor het verspreiden van mijn onderzoeksresultaten heb ik gekozen voor het ontwikkelen van een webpagina. Deze is te vinden op <https://jorisperrenet.github.io/diagnostische-vragen>. Deze digitale aanpak stelt leraren in staat om zelf diagnostische vragen samen te stellen, en verwijst naar bronnen waar men, voor elk vak, collecties van diagnostische vragen kan vinden. Na het maken van de webpagina is deze verschenen in het wekelijkse nieuwsblad dat rond word gestuurd naar al het (onderwijs ondersteunend) personeel van mijn stageschool.

Om mijn impact te vergroten ben ik van plan deze link te verspreiden over enkele social media platforms zoals facebook. Daarnaast zal ik bij een komende bijeenkomst van de HOS (het Haagse samenwerkingsverband) deze link verspreiden onder de stagiaires door de link in de openingspresentatie te krijgen.

6.3 Heb ik impact kunnen maken?

Tot slot is er natuurlijk nog de vraag of de docenten van mijn school mijn publicatie in het wekelijkse nieuwsblad hebben gezien. Tot mijn verbazing had iedere docent die ik ernaar vroeg in de docentenkamer een dag of twee later het bericht in de nieuwsbrief gelezen. Om het wat concreter te maken, van de 14 docenten die ik ernaar heb gevraagd waren er:

- 14 die het bericht in de nieuwsbrief hebben gelezen
- 10 die bereid waren dit in hun lespraktijk uit te proberen
- 5 die al een lesplan hadden gemaakt met een diagnostische vraag
- 3 die de link door hebben verspreid naar collega's van andere scholen

De verspreiding van de link over andere platformen laat nog op zich wachten. Dus de impact daarvan is nog onbekend.

6.4 Alternatieve impactactiviteiten

Dit waren de alternatieve activiteiten die ik heb overwogen om impact te bereiken.

- Publicatie in een vakdidactisch tijdschrift zoals Euclides zoals van Remoortere, 2021 heeft gedaan.
- Het organiseren van een workshop voor (wiskunde)docenten tijdens een (Nationale Vereniging van Wiskundeleraren) bijeenkomst of bij een praktijkdag voor het samenwerkingsverband.
- Workshop tijdens studiedagen/samenwerkingsverbandbijeenkomsten van school.
- YouTube-instructievideo's maken. Ook dit is een link en is dus makkelijk te verspreiden. Maar vraagt om meer aandacht en tijd van de persoon die het wil gebruiken.

Activiteit	Bereik	Interactie	Tijd	Gebruiksgemak	Impactpotentieel
Publicatie in vakblad	Wiskundedocenten	Passief	Hoog	Hoog	Continu, breed
Workshop NVvW/Praktijkdag	Max. 40 docenten	Actief	Laag	Laag	Snel, klein
YouTube-instructievideo	Onbeperkt	Passief	Hoog	Hoog	Continu, breed
Presentatie HOS	Max. 100 stagiaires	Actief	Laag	Laag	Snel, klein
Website	Onbeperkt	Passief	Hoog	Hoog	Continu, breed

6.4.1 Keuzemotivatie

Maar waarom heb ik dan gekozen om een website te maken?

Ik heb bewust gekozen om een webpagina te maken vanwege de laagdrempeligheid, toegankelijkheid en beschikbaarheid. In tegenstelling tot eenmalige workshops kunnen docenten de vragen op elk gewenst moment raadplegen en implementeren. De digitale vorm faciliteert eenvoudige verspreiding binnen docentennetwerken. Daarnaast heb ik iets meer verstand van websites dan van YouTube videos.

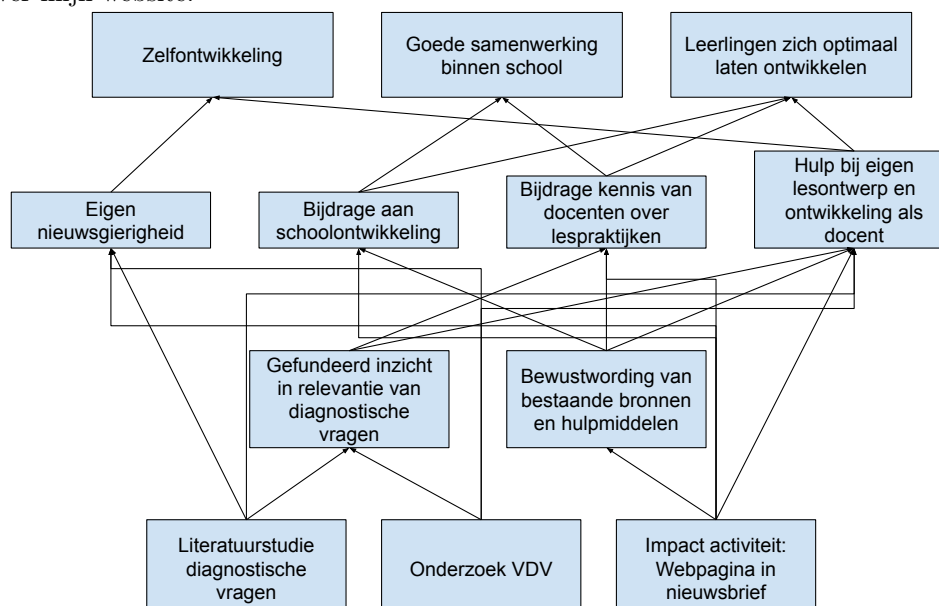
Hiernaast heb ik het met mijn vakcoach erover gehad. Hij was vooral van de schaalbaarheid van een website, aangezien een link makkelijk te verspreiden is.

Ook de andere wiskundedocenten (die ik sprak bij de maandelijkse vergadering) waren enthousiast over het plan om een website te maken.

6.5 Wat heb ik geleerd over het bereiken van impact?

Ik heb geleerd dat het bereiken van impact vraagt om meer dan alleen het delen van een product. Het gaat om doelgericht verspreiden en het meten van resultaten. Je bent verzekerd van het feit dat je impact hebt bereikt als je de wisselwerking tussen die twee goed uitvoert: doelgericht verspreiden -> meten van resultaten/impact -> analyseren van de meetresultaten -> weer verspreiden -> etc.

Ik realiseer me nu ook dat alternatieve vormen, zoals workshops of publicaties, andere voordelen bieden en dat een combinatie van strategieën de impact kan vergroten. Vandaar dat ik mensen van de HOS heb benaderd over mijn website.

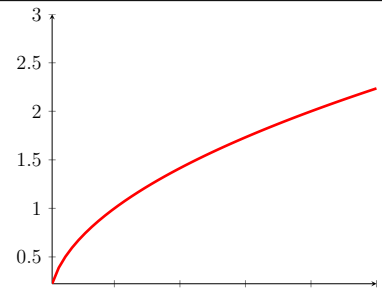


Appendix A

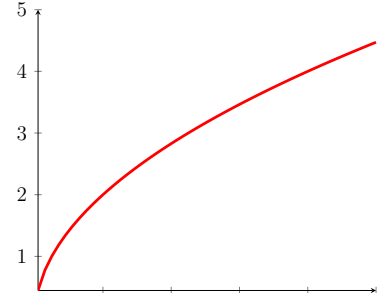
Werkblad

Zie volgende pagina.

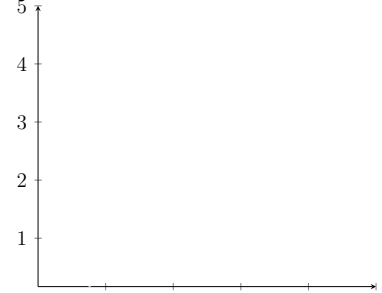
Vul de volgende tabellen verder in.

Grafiek	Functie	D_f	B_f	Randpunt
	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$[0, \rightarrow\rangle$	$(0, 0)$

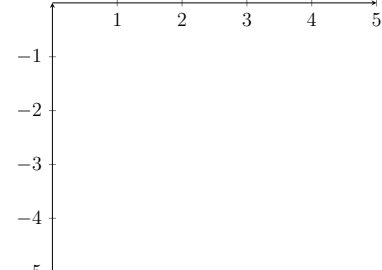
Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2

	$f(x) = 2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$			
---	--------------------------------	--	--	--

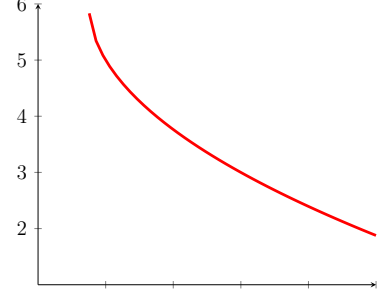
Translatie $(\frac{3}{4}, 0)$

			$[0, \rightarrow\rangle$	
--	--	--	--------------------------	--

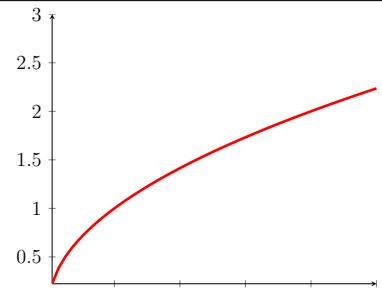
Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -1

				$(\frac{3}{4}, 0)$
---	--	--	--	--------------------

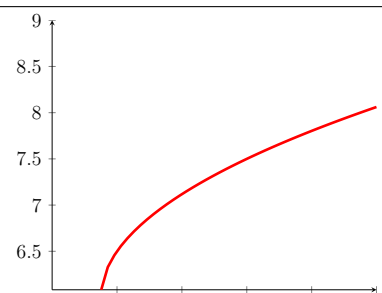
Translatie $(0, 6)$

	$f(x) = 6 - \sqrt{4x - 3}$			
---	----------------------------	--	--	--

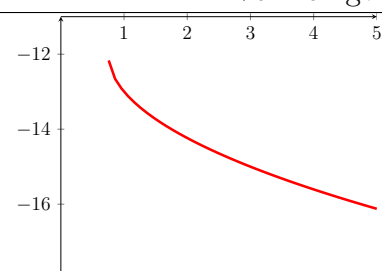
Vul de volgende tabellen verder in.

Grafiek	Functie	D_f	B_f	Randpunt
	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \rightarrow)$	$[0, \rightarrow)$	$(0, 0)$

Translatie $(\frac{3}{4}, 6)$

	$f(x) = 6 + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$			
---	-------------------------------------	--	--	--

Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -2

				
--	--	--	--	--

Welke transformatie verandert wat?

	Domein	Bereik	x -coördinaat randpunt	y -coördinaat randpunt
Translatie $(0, 1)$				
Translatie $(1, 0)$				
Verm. x -as met 2				
Verm. x -as met -2				

Appendix B

Analyse van Kenmerken

De diagnostische vragen die zijn geanalyseerd staan hieronder. De kenmerken waarop ze zijn beoordeeld staan in sectie 2.4, de beoordeling staat aan het einde van dit hoofdstuk.

Diagnostische vragen (de vragen zoals ik ze heb afgenomen in de klas).

1. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} ???$$

A. $y = (x - 2)^2$

C. $y = 2x^2$

B. $y = (x + 2)^2$

D. $y = x^2 - 2$

2. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{x+1} + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, met } 2} ???$$

a. $2\sqrt{x+1} + 6$

C. $2\sqrt{x+1} + 12$

b. $\sqrt{2x+1} + 6$

d. $\sqrt{2x+1} + 12$

3. Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}, 2)} ???$$

a. $5 - \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$

c. $5 - \sqrt{2x+1}$

b. $3\frac{1}{2} - \sqrt{2x-4}$

D. $5 - \sqrt{2x-1}$

4. Welke transformatie(s) passen op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{???} y = 2^{2x-1}$$

A. Translatie $(-1, 0)$.

d. Translatie $(-2, 0)$.

b. Translatie $(1, 0)$.

e. Translatie $(2, 0)$.

c. Verm. x -as, met 2.

F. Verm. x -as, met 4.

5. Welke transformaties komen er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^x \xrightarrow{???} y = 2^{2x-3}$$

a. Translatie $(3, 0)$ daarna verm. y -as met 2.

C. Translatie $(3, 0)$ daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$.

b. Verm. y -as met 2 daarna translatie $(3, 0)$.

d. Verm. y -as met $\frac{1}{2}$ daarna translatie $(3, 0)$.

Voor elke vraag wil ik naar aanleiding van punt 5 (van sectie 2.4 kunnen beantwoorden of alle misconcepten in de antwoordmogelijkheden zitten. Voor elke antwoordmogelijkheid wil ik naar aanleiding van punten 1 tot en met 4 duidelijk hebben welk misconception mijn leerlingen hebben als ze dit antwoorden.

Waarom punt 1 tot en met 4 samenvoegen? Omdat de beweegredenen achter die regels hetzelfde is: Krijg je als leraar goed zicht op het functioneren van de leerlingen (weet je waar het fout is gegaan bij een specifiek antwoord). Punt 5 houdt zich vervolgens bezig met een *complete* zicht. Uiteindelijk creëer je hiermee een “dan en slechts dan als” relatie tussen het antwoord van leerlingen op de vraag en hun misconception (of hun begrip van de stof).

Per vraag (de vragen staan hierboven) ben ik op elke antwoordoptie ingegaan. Additionele opmerkingen heb ik eronder neergezet.

1.
 - a. Goed.
 - b. De leerling verwisselt plus en min bij de translatie.
 - c. De leerling ziet een verschuiving van 2 naar rechts, maar vermenigvuldigt met 2.
 - d. De leerling pas -2 toe, maar zet het niet tussen haakjes. Of de leerling schuift de functie 2 naar beneden.

Het misconception van de functie $x^2 + 2$ staat er niet tussen, 2 naar rechts schuiven lezen als 2 naar boven schuiven. Over het algemeen acht ik de kans niet groot dat leerlingen de functie verticaal gaan verschuiven in plaats van horizontaal, daarom vindt ik het oké dat er twee mogelijke misconcepties zijn bij antwoord d (verticaal verschuiven met $(0, -2)$ komt namelijk op dit antwoord uit, zowel als de haakjes niet toepassen). Dit misconception wordt ook nog in volgende vragen eruit gehaald. Daarnaast zijn dit 2 misconcepten in 1 antwoord.

2.
 - a. De leerling doet alleen de wortel keer twee, maar weet niet dat de constante ook keer twee gaat.
 - b. De leerling doet de x keer 2, maar weet niet dat de hele functie keer 2 gaat.
 - c. Goed.
 - d. De leerling doet de constante keer 2, maar doet alleen de x keer 2.

Vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ in plaats van met 2 (en daarmee antwoordmogelijkheid $\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+3$) staat er niet tussen. Ik zie in het lesboek geen aanleiding voor deze misvatting.

3.
 - a. Leerling doet de $\frac{1}{2}$ niet tussen haakjes.
 - b. Leerling wisselt x en y in het coördinaat om.
 - c. Leerling doet de $\frac{1}{2}$ wél tussen haakjes, maar doet de min niet goed.
 - d. Goed.

De misvatting dat je $\frac{1}{2}$ niet tussen haakjes doet én dat je de min niet goed doet staat hier niet tussen, maar dit zijn ook 2 misvattingen in 1, onwaarschijnlijk dus.

4.
 - a. Goed.
 - b. Leerling past de min niet goed toe en doet geen haakjes om de x (deze optie staat erbij om geen mogelijkheid te bieden om de vraag te beantwoorden met rederen hoeveel van hoeveel mogelijkheden er staan).
 - c. Leerling past de min niet goed toe.
 - d. Leerling doet geen haakjes om de x .
 - e. Leerling denkt $-3 + 2 = -1$, dus dat klopt, maar weet niet dat hij met machten bezig is.
 - f. Goed.

De vraag heeft niet 4 antwoorden, maar heeft hierdoor wel alle misconcepten erin staan.

5.
 - a. Verm. met y -as gaat niet goed.
 - b. Verkeerde volgorde en verm. met y -as gaat niet goed (deze optie staat erbij om geen hint te geven welk antwoord wel goed is).
 - c. Goed.

d. Verkeerde volgorde.

De volgorde van operaties is hier relevant. Hier is aangenomen dat de translatie niet naar $(-3, 0)$ is of naar $(0, 3)$. Deze misconcepten waren in eerdere vragen al behandeld.

6. **Let op: Deze vraag bestaat niet meer, zie sectie 4.1.3 (maar ik heb de beweegredenen om hem er wél in te zetten gehouden).**

a. Leerling verwisselt min en plus bij verticale verschuiving.

b. Goed.

c. Leerling verwisselt min en plus bij horizontale verschuiving.

d. Leerling verwisselt min en plus bij horizontale en verticale verschuiving (deze staat erbij om geen hint te geven voor het goede antwoord).

Andere misconcepten zoals vermenigvuldiging met de x -as of zoiets staan niet in de vraag. Punt 2 van Barton, “They should test a single skill/concept.” is het hier niet per se mee eens. Ik ga er al van uit bij het stellen van de vraag dat dit de mogelijke misconcepten zijn die er kunnen zijn, verwisselen van minnen en plussen bij verschuivingen, maar er zou ook nog iets heel anders verkeerd kunnen zijn bij een specifieke functie, zoals iets niet tussen haakjes zetten of wat dan ook. De beweegreden voor punt 2: Kan je een fout antwoord terugkoppelen? wordt gelukkig wel gewaarborgd. In mijn digitale vragenlijst moet ik er zeker van zijn dat leerlingen niet terug kunnen gaan naar vragen. Op het moment dat ze deze vraag zien, kunnen ze wellicht een oud antwoord willen veranderen.

Appendix C

Resultaten Vragenlijst

Per vraag die afgenomen is in de vragenlijst heb ik

- De vraag opnieuw genoemd.
- De resultaten opgesomd.
- Een totaaloverzicht gemaakt van de reden van leerlingen voor de antwoordoptie die ze **niet** hebben gekozen.
- Een conclusie getrokken of de vraag wel of niet effectief is.
- De verbeterderde versie van de vraag gegeven.

C.1 Vraag 1

Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} ???$$

A. $y = (x - 2)^2$

C. $y = 2x^2$

B. $y = (x + 2)^2$

D. $y = x^2 - 2$

13 leerlingen hadden antwoord A gekozen, en 1 leerlingen had antwoord D gekozen. Van elke leerlingen heb ik ook de reden gevraagd waarom de andere antwoorden niet kloppen (en deze heb ik gecategoriseerd).

Daarnaast heeft het volgende zich voorgedaan bij het afnemen. Twee leerlingen (ook al was hier niet echt de gelegenheid voor) riepen mij erbij om te zeggen dat het goede antwoord er niet bij stond. Ze hadden namelijk net transformaties op exponentiële functies geleerd en beweerden dat x^2 gaat naar $x^{2-2} = x^0 = 1$. Ik heb gezegd dat ze toch maar 1 van de 4 mogelijkheden moesten kiezen.

Totaaloverzicht

- A. – Goed.
- B. – Verkeerde kant op: 6
– Het moet - zijn en niet +: 5
– Top is bij (2,0), dus x moet 2 zijn zodat je $(x - 2)^2 = 0$ krijgt: 2
– Het is gewoon zo/geen reden: 1
- C. – Het gaat keer (en dat is verm. met x -as): 6
– Moet positief zijn/ze verschuiven de verkeerde kant op (rede die dus hoort bij B): 2
– Het is gewoon zo/geen reden: 6

- D.
 - Haakjes (niet helemaal de goede reden dus): 4
 - Dit gaat om de y -waarde: 3
 - Kwadraat hoort ook bij -2 : 1
 - Het is gewoon zo/geen reden: 6

De leerling die D had gekozen heeft het volgende gezegd: “Ik denk D, omdat als je een grafiek naar rechts verschuift, doe je -2 . [...] A kan ook niet want dit antwoord is goed als je de grafiek naar beneden zou verplaatsen.” Hieruit kan je dus constateren dat deze leerlingen een misvatting heeft waardoor die de x en de y coördinaat verwisselt. Perfect! Want dit misconception hadden wij voorspelt in sectie 2.4 voor iemand die voor optie D kiest.

Conclusie

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag heeft zijn werk goed gedaan, we kregen namelijk 1 leerling te zien die een misconception had en daardoor ook de verkeerde optie heeft gekozen. Vanuit de redenen dat andere antwoordmogelijkheden niet goed waren, kon men 2 verkeerde soorten van redenen zien. De ene hoorde bij vraag C, maar was omdat de leerling een rede opgaf die ook kon horen bij vraag B, dus dit kan duiden op een gewone fout/luiheid van de leerling en niet een ongedetecteerd misconception. De andere hoorde bij vraag D, de haakjes. Alhoewel deze reden niet volledig klopt, het geeft niet aan dat er verborgen misconcepten zijn. Al met al zijn alle leerlingen met een misconception eruit gehaald. Precies wat Barton van ons wil.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): A is het goede antwoord. Daarnaast hebben we gezien dat optie D ook goed is, omdat we iemand met het verwachte misconception hebben gedecteerd. Niemand met dat misconception heeft iets anders gekozen. Opties B en C zijn niet gekozen, maar er waren ook geen leerlingen met dat specifieke misconception. Veel leerlingen hebben bij optie B het misconception dat je kon hebben goed opgenoemd, wat aangeeft dat mijn leerlingen hier expliciet bewust van zijn, iets dat niet voor iedereen kan gelden. Bij vraag C was dit ongeveer de helft. Daarom stel ik dat optie B beter was dan optie C. Wat zich heeft voorgedaan, namelijk dat $x^{2-2} = x^0 = 1$ er niet tussen stond, kunnen we daarom gebruiken in plaats van optie C. Hiervoor zal ik de functie vervangen door x^4 , dan wordt het namelijk $x^{4-2} = x^2$.

De uiteindelijke vraag wordt:

Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} ???$$

A. $y = (x - 2)^4$

C. $y = x^2$

B. $y = (x + 2)^4$

D. $y = x^4 - 2$

De essentie van de mogelijke misconcepten bij opties A, B, en D is onveranderd. Bij vraag C is het dus niet meer vanwege een mogelijke verwarring tussen translaties en vermenigvuldigingen met de x -as, maar tussen polynomen en exponentiële functies (in andere woorden, waar staat de x).

C.2 Vraag 2

Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{x+1} + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, met } 2} ???$$

a. $2\sqrt{x+1} + 6$

C. $2\sqrt{x+1} + 12$

b. $\sqrt{2x+1} + 6$

d. $\sqrt{2x+1} + 12$

10 leerlingen hadden antwoord C gekozen, 1 leerling had A, en 3 leerlingen hadden B.

Totaaloverzicht

- A. – De ‘+6’ wordt niet vermenigvuldigd: 11
 - De gehele functie moet keer 2: 1
 - Het is gewoon zo/geen reden: 1
- B. – De gehele functie moet keer 2: 7
 - De 2 hoort voor de wortel: 1
 - Dit zijn twee fouten in een: 1
 - Het is gewoon zo/geen reden: 3
- C. – Goed.
- D. – De gehele functie moet keer 2: 5
 - De 2 hoort voor de wortel: 5
 - Het is gewoon zo/geen reden: 2

De leerling die A had gekozen heeft het volgende gezegd: “C en D kunnen niet omdat 12 al vermenigvuldigd is door 2 en B kan niet omdat de 2 voor de wortel moet.” Dit geeft perfect aan dat deze leerlingen het misconcept had dat bij optie A werd getest, namelijk of diegene de gehele functie maal 2 doet.

De 3 leerlingen die B hadden gekozen hebben het volgende gezegd:

- “Bij A vermenigvuldigen ze maar de helft van de functie wat niet logisch is, bij C vermenigvuldigen ze de hele functie maar de y hoeft niet vermenigvuldigd te worden en bij B vermenigvuldigen ze alleen de x en de y wat ook onlogisch is.”: Ik heb geen idee wat deze leerling hier dacht. Waarom is B onlogisch als je het hebt gekozen? Maar, als de laatste B een D moest zijn is het een stuk logischer. Deze leerling leest de functie als coördinaten en benoemt het linker deel x and het rechter deel y . Omdat het een vermenigvuldiging is t.o.v. de x -as moet er dus een 2 voor de x komen.
- “Ik denk B, omdat bij D vermenigvuldigen ze alleen x en 6 met 2 en dat is niet goed. Bij A vermenigvuldigen ze het getal in de wortel maar niet het getal daarbuiten en dat is dus ook niet goed. En C is ook niet goed omdat ze de hele functie vermenigvuldigen met twee en je moet alleen de x vermenigvuldigen. Dus is het B.”: Hier weer, alleen de x moet worden vermenigvuldigd met 2, dus $x \rightarrow 2x$.
- “A en C kan niet want daar vermenigvuldigen ze verkeerd en D kan niet omdat ze daar ook de 6 vermenigvuldigen.”: Ook hier is gedacht dat $x \rightarrow 2x$.

Perfect, dit is inderdaad het verwachte misconcept.

Conclusie

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag heeft zijn werk goed gedaan, we kregen 4 leerling te zien die misconcepten hadden en daardoor ook verkeerde opties hebben gekozen. Er zijn vrijwel geen verkeerde redenen genoemd bij de leerlingen die het goed hadden, daardoor was er geen misconcept bij de andere leerlingen en hebben wij een *compleet* beeld gekregen van alle misconcepten (hier is dus aan kenmerk 5 van sectie 2.4 voldaan).

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): C is het goede antwoord. Leerlingen met het desbetreffende misconcept hebben A en B genoemd, dus ook deze opties dienen te blijven. Optie D is twijfelachtig, wellicht dat deze vervangen zou kunnen worden door $\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+3$, maar dan kan met wellicht zonder het goede antwoord te weten het goede antwoord al deduceren omdat dan alleen A de gemeenschappelijke eigenschappen heeft van B en C. Daarom heb ik optie D onveranderd gelaten.

De uiteindelijke vraag blijft dus hetzelfde.

Als men deze diagnostische vraag als tool gebruikt, zou dit een mooi moment zijn om in te springen en je les wellicht te veranderen. Een aanzienlijk deel van de leerlingen had de opgave fout, ze hadden een misconcept, waardoor het onverstandig is nieuwe stof te behandelen over dit onderwerp. Daarom is wellicht een korte terugblik aan het begin van de les handig.

C.3 Vraag 3

Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}, 2)} ???$$

a. $5 - \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$

c. $5 - \sqrt{2x + 1}$

b. $3\frac{1}{2} - \sqrt{2x - 4}$

D. $5 - \sqrt{2x - 1}$

12 leerlingen hadden antwoord A gekozen, 2 leerlingen hadden D. Terwijl D het goede antwoord is!!

Totaaloverzicht

Het totaaloverzicht dit keer is gebaseerd op de misconcepten die de leerlingen hebben (deze heb ik gecategoriseerd aan de hand van hun uitleg).

- Misconcept, maar geen uitleg: 3
- Misconcept, het moet $-\frac{1}{2}$ zijn: 4
- Misconcept, haakjes hoeven niet: 3
- Misconcept, je ziet de $\frac{1}{2}$ niet terug in het antwoord: 2

Een van de leerlingen die het goed had zei terecht dat bij A de haakjes waren vergeten, de ander zei dat $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, dus het antwoord wel D moest zijn. Bij deze leerlingen was er dus geen sprake van een ander misconcept.

Conclusie

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): Deze vraag hadden heel veel leerlingen fout. Waarschijnlijk heeft de docent iets gedaan waardoor deze misconcepten zijn ontstaan. Dit is een moment in de les (zeker als je deze afneemt aan het begin van de les) om alles overhoop te gooien en nog een les te geven over de basis van translaties, wanneer je wel haakjes gebruikt en wanneer niet.

Is dit een effectieve vraag: Niet helemaal, er zijn leerlingen met verschillende misconcepten (namelijk haakjes hoeven niet en je ziet de $\frac{1}{2}$ niet terug in het antwoord) op dezelfde optie gekomen. Dit is in strijd met punt 4 van sectie 2.4.

Dit moet worden bijgesteld.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Naast A en D zijn er ook nog de antwoordmogelijkheden B en C. Deze werden niet genoemd en aangezien de vraag veel fout ging zijn deze mogelijkheden weinig getest. Het misconcept van vraag C, hadden we al getest in vraag 1, dus dit hoeven wij niet nogmaals te doen. Daarnaast moet bij het bijstellen worden gelet dat de misconcepten hierboven op andere antwoorden uitkomen.

Welke functie komt er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = \sqrt{2x - \frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}, 3)} ???$$

a. $3 + \sqrt{2x - 1}$

c. $3 + \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$

b. $\frac{1}{2} + \sqrt{2x - 3\frac{1}{2}}$

D. $3 + \sqrt{2x - 1\frac{1}{2}}$

Als leerlingen het misconcept hadden dat ze $\frac{1}{2}$ terug wilde zien in het antwoord, zouden ze nu voor optie C gaan. Leerlingen met het misconcept dat haakjes niet hoeven gaan voor optie A. Leerlingen met het misconcept

dat ze x en y omwisselen gaan voor B (ook al heeft niemand dit hiervoor gedaan), daarnaast heb ik er niet $\frac{1}{2} + \sqrt{2x - 6\frac{1}{2}}$ van gemaakt omdat zo veel leerlingen dit fout hadden. En D is nog steeds het goede antwoord.

Ook heb ik de translatie $(\frac{1}{2}, 3)$ gekozen in plaats van $(\frac{1}{2}, 2)$, omdat dit laatste wellicht voor verwarring zou kunnen zorgen. Zie stelregel 1 in sectie 2.4.

Zoals we nu hebben vastgesteld hebben veel leerlingen het misconception dat haakjes niet hoeven bij wortelfuncties. Terwijl ze dit wel goed deden bij polynomen. Is dit misconception ook aanwezig bij exponentiële functies? We gaan het zien.

C.4 Vraag 4

Welke transformatie(s) passen op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{???} y = 2^{2x-1}$$

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| A. Translatie $(-1, 0)$. | d. Translatie $(2, 0)$. |
| b. Translatie $(-2, 0)$. | e. Verm. x -as, met 2. |
| c. Translatie $(1, 0)$. | F. Verm. x -as, met 4. |

- 1 leerling had alleen antwoord A.
- 8 leerlingen hadden alleen antwoord B.
- 1 leerling had alleen antwoord D.
- 1 leerling had alleen antwoord E.
- 1 leerling had antwoorden B en E.
- 2 leerlingen had antwoorden D en E.

Geen enkele leerling heeft dus optie F gekozen, en maar 1 leerling had een deel goed! De vraag is of dit gewoonweg te lastig was, of kunnen wij nog specifieke misconcepten achterhalen die de leerlingen hebben door alleen naar de gekozen antwoorden te kijken.

Totaaloverzicht

Iedereen heeft het fout, maar waarom? Hier staat het.

- Geen uitleg: 8
- Misconcept, geen haakjes: 5
- Misconcept, vermenigvuldigen doet nooit iets met de exponent: 3

De leerling die alleen voor D had gekozen zei “Antwoord B kan ook niet, want deze verschuift de verkeerde kant op.” Deze leerling had wel vraag 1 goed, waarschijnlijk raakte deze leerling in de war doordat er $2x - 3$ in de exponent stond, als je dan naar de $-$ kijkt denk je wellicht dat een verschuiving die kant op goed is, terwijl dat alleen zo is als de $-$ voor de x staat.

Veel leerlingen hadden geen uitleg, misschien duurde deze vraag te lang, waardoor er zo veel denkstappen in zaten dat ze het niet konden uitleggen.

Vrijwel geen enkele leerling koos voor optie E of F, omdat ze vermenigvuldigingen met de x -as niet associëren met een verandering in de exponent, terwijl dat wel mogelijk is. Dit is dus een misconception die er wel uit is gehaald. De leerlingen die wel E hadden geselecteerd hadden hier geen uitleg bij gegeven.

Conclusie

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): De vraag duurt wellicht te lang. Daarnaast kan het als docent lastig zijn om een vraag met meerdere keuzemogelijkheden snel te interpreteren, omdat er veel combinaties van antwoorden mogelijk zijn (hierdoor heb ik de vraag anders verwoord).

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Mogelijkheid D is goed, omdat dit een misconception eruit heeft weten te halen. Ook optie B is goed, omdat veel leerlingen met een misconception dit hebben gekozen. A en F zijn correct. E werd 4 keer gekozen, ook al is het onderliggende misconception onbekend. Antwoord C werd nooit gekozen, en dat terwijl optie D twee misconcepten in 1 heeft. Dit komt waarschijnlijk doordat deze leerlingen vaak haakjes vergeten (zoals naar boven is gekomen in vraag 3).

Dit is de vraag nu (let op, dit is niet de eindversie van de vraag, die staat onder hieronder):

Er zijn 2 verschillende transformaties die passen op de plek van de 3 vraagtekens, welke zijn dit?

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{???} y = 2^{2x-1}$$

A. Translatie $(-1, 0)$.

d. Translatie $(2, 0)$.

b. Translatie $(-2, 0)$.

e. Verm. x -as, met 2.

c. Translatie $(1, 0)$.

F. Verm. x -as, met 4.

Ik heb de vraag anders verwoord, om misverstanden te voorkomen. Omdat veel leerlingen deze vraag fout hadden kan hij toch interessant zijn om te gebruiken. Wellicht moet de vraag wel anders gesteld worden. Laat bijvoorbeeld de vraag zien en geef 10 seconden voor de vraag: past optie ... op de plek van de vraagtekens, zo krijg je de 6 vragen:

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 0)} y = 2^{2x-1}$$

A. Dit klopt

b. Dit klopt niet

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} y = 2^{2x-1}$$

a. Dit klopt

B. Dit klopt niet

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} y = 2^{2x-1}$$

a. Dit klopt

B. Dit klopt niet

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} y = 2^{2x-1}$$

a. Dit klopt

B. Dit klopt niet

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{Verm. } x\text{-as, met } 2} y = 2^{2x-1}$$

a. Dit klopt

B. Dit klopt niet

$$y = 2^{2x-3} \xrightarrow{\text{Verm. } x\text{-as, met } 4} y = 2^{2x-1}$$

A. Dit klopt

b. Dit klopt niet

Op deze manier duurt de vraag ook niet meer zo lang. Als docent kan je de keuzemogelijkheden ook weer snel interpreteren. Daarnaast was dit, zoals gezegd werd in 4.1.3, een vraag waarbij je moest werken vanuit de antwoordmogelijkheden, terwijl dit nu niet meer zo is.

C.5 Vraag 5

Welke transformaties komen er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = 2^x \quad \xrightarrow{\quad ??? \quad} \quad y = 2^{2x-3}$$

- | | |
|---|--|
| a. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met 2. | C. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$. |
| b. Verm. y -as met 2 daarna translatie (3,0). | d. Verm. y -as met $\frac{1}{2}$ daarna translatie (3,0). |

10 leerlingen hadden antwoord B gekozen, 3 leerlingen hadden D en 1 leerling het goede antwoord: C!

Totaaloverzicht

Veel leerlingen hebben geen (uitgebreide/inzichtgevende) uitleg gegeven.

- 5 van de leerlingen met antwoord B, hadden het misconception dat een vermenigvuldiging met de y -as met 2 moest zijn, de andere 5 hadden geen reden opgegeven.
- De leerling die antwoord C koos kon het niet uitleggen.
- 1 leerling met antwoord D zei dat C op iets anders uitkwam, de andere leerlingen met als antwoord D hebben geen uitleg gegeven.

We wisten al dat veel leerlingen het misconception hadden dat ze geen haakjes gebruikten.

Een van de antwoorden was als volgt: “Deze is gewoon makkelijk, je doet eerst x keer 2, dan krijg je $2x$ en dan 3 naar rechts, dus -3 dus dan is B goed” Deze leerling had dus 2 misconcepten, precies de misconcepten die we verwacht hadden in sectie 2.4.

De leerlingen die het antwoord D gaven konden, net zoals de rest van de klas, geen haakjes toepassen. Als men optie D kiest, dan kan dat niet alleen door een verkeerde volgorde komen, maar ook doordat met de haakjes niet uitwerkt.

Leerlingen die B of D kozen hadden de volgorde verkeerd, in de meeste gevallen moet je eerst transleren, voordat je gaat vermenigvuldigen met de y -as.

Conclusie

Waarom is dit een effectieve vraag (of niet): Deze vraag hadden wederom heel veel leerlingen fout. Wellicht was de vraag te lastig/kon de vraag makkelijker. We hadden bijvoorbeeld de exponentiële functie weg kunnen laten.

Waarom zijn de antwoordmogelijkheden goed (of niet): Optie B was goed, zowel als optie D omdat veel leerlingen dit misconception hadden. Optie A, omdat dat er maar 1 misconception in zat (versus B met 2) had niemand gekozen, maar voor compleetheit (zodat je niet de optie kan gaan kiezen met de meeste andere antwoorden die erop lijken) heb ik deze erin gelaten. Optie C was correct.

Welke transformaties komen er op de plek van de 3 vraagtekens?

$$y = x \quad \xrightarrow{\quad ??? \quad} \quad y = 2x - 3$$

- | | |
|---|--|
| a. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met 2. | C. Translatie (3,0) daarna verm. y -as met $\frac{1}{2}$. |
| b. Verm. y -as met 2 daarna translatie (3,0). | d. Verm. y -as met $\frac{1}{2}$ daarna translatie (3,0). |

Bibliography

- M. Dam, S. F. (2025, April). *Misvattingen opsporen en aanpakken: Diagnostische vragen in de betavakken* (Research Report). <https://www.diagnostischevragen.nl/wp-content/uploads/2025/04/Diagnostische-vragen-in-de-betavakken Onderzoek boekje.pdf>
- Barton, C. (2018). On formative assessment in math: How diagnostic questions can help. *American Educator*, 42(2).
- Barton, C. (2020a). *Volgens barton: Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts en 12 jaar aan mislukkingen*. Phronese.
- Faes, S. (2021). *Ontdek misconcepten; collectieve kennis vertaald naar bruikbare vragen*. (tech. rep.). NVOX. https://www.nvon.nl/uploads/Diagnostische%20vragen/46-47_NVOX21_TDS_NR-6.pdf
- Ana Elisa Lage, M. T. G. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. <https://staff-old.najah.edu/sites/default/files/AN%20ANALYSIS%20OF%20STUDENTS%E2%80%99%20IDEAS%20ABOUT%20TRANSFORMATIONS%20OF%20%20Functions.pdf>
- Eisenberg, T., & Dreifus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. *Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 45-68). https://books.google.nl/books?id=wKfQDgAAQBAJ&pg=PA45&source=gbs_toc_r&cad=2#v=onepage&q&f=false
- Sasman. (2011). Proceedings of the seventeenth national congress of the association for mathematics education of south africa. <https://www.amesa.org.za/AMESA2011/Volume1.pdf>
- Anabousy, A., Daher, W., Baya'a, N., & Abu-Naja, M. (2014). Conceiving function transformations in different representations: Middle school students working with technology. *Mathematics Education*, 9, 99–114. <https://doi.org/10.29333/iejme/284>
- STEM Learning. (n.d.). *Best approaches: Diagnostic questions* (Teaching Resource). STEM Learning. https://www.stem.org.uk/sites/default/files/pages/downloads/BEST_Approaches_Diagnostic%20questions.pdf
- Gulikers, B. (2017). *Doelgericht professionaliseren: Formatieve toetspraktijken met effect! wat doet de docent in de klas?* (Tech. rep.). https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/Inhoudelijke-eindrapport_NRO-PPO-405-15-722_DEF.pdf
- Third Space Learning. (2025, August). Diagnostic questions in action: A complete guide for teachers [Website]. <https://thirdspacelearning.com/blog/diagnostic-questions/>
- Smith, H. H. (2009). Teaching and learning function transformations. <https://pat-thompson.net/PDFversions/Theses/2009Smith.pdf>
- Anabousy, A., & Daher, W. (2015). Students' recognition of function transformations' themes associated with the algebraic representation. *redimat*, 4, 179–194. <https://doi.org/10.17583/redimat.2015.1110>
- Rina Zazkis, K. G., Peter Liljedahl. (2003). Conceptions of function translation: Obstacles, intuitions, and rerouting. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312303000518>
- Rina Zazkis, P. L., & Gadowsky, K. (n.d.). Translation of a function: Coping with perceived inconsistency. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED501156.pdf>
- Barton, C. (2020b). *Reflect, expect, check, explain: Sequences and behaviour to enable mathematical thinking in the classroom*. Hachette Learning. <https://books.google.nl/books?id=eDudEAAAQBAJ>
- Caroline Wylie, D. W. (n.d.). Diagnostic questions: Is there value in just one? <https://mrbartonmaths.com/resourcesnew/8.%20Research/Formative%20Assessment/Is%20there%20value%20in%20just%20one%20-%20Dylan%20Wiliam%202006.pdf>
- van Remoortere, J. (2021). Diagnostische vragen in de wiskundeles. <https://nvon.nl/uploads/Diagnostische%20vragen/Artikel%20Euclides%20diagnostische%20vragen.pdf>